CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

AUTOR
ANDRÉ BROCHI

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

AUTOR
ANDRÉ BROCHI

1ª EDIÇÃO
SESES
RIO DE JANEIRO 2015

Sumário

1

Limites e Continuidade

1.1 Noção intuitiva de limite e definição informal de limite

No estudo das funções, é comum determinarmos valores da variável dependente y a partir dos valores atribuídos à variável independente x. As funções são expressas matematicamente por uma equação em que há, pelo menos, duas variáveis: y, que denominaremos variável dependente; e x, a variável independente. Nesse caso, dizemos que y varia em função de x.

EXEMPLO 1.1

Considere a função y = 2.000 + 5x, em que y (em reais) é o custo total de produção de x unidades de uma certa utilidade. Podemos, então, determinar o custo y que será gerado pela quantidade produzida que desejarmos. Se essa quantidade for, por exemplo, x = 3.000 unidades, teremos

$$y = 2.000 + 5 \cdot 3.000$$
$$y = 2.000 + 15.000$$
$$y = 17.000$$

Da mesma forma, podemos determinar o valor do custo y para outras diversas (ou infinitas) quantidades x. Isso porque, matematicamente, a expressão que representa tal função permite o cálculo de y para todos os valores reais de x. Trata-se de uma função do primeiro grau, cujo domínio, ou seja, conjunto de todos os valores que a variável independente pode assumir, não tem nenhuma restrição. Qualquer que seja o valor que você atribua a x, é sempre possível multiplicá-lo por 5 (a multiplicação é sempre possível entre dois valores reais quaisquer). É claro que, quando essa função é aplicada a uma situação prática, os valores de x considerados devem respeitar as restrições impostas por tal aplicação. Isto é, se na situação acima x representa a quantidade, em unidades, de uma certa utilidade ou produto, então ele pode assumir somente valores naturais (0, 1, 2, 3,...)

No entanto, o que mais nos interessa dizer no momento, é que qualquer que seja o valor que tenhamos que atribuir a x é sempre possível determinar exatamente qual o valor que y irá assumir.

Isso nem sempre é possível para outros tipos de funções. Vamos abordar um exemplo em que a atribuição de valores a x possui restrição.

EXEMPLO 1.2

Uma função de vasta aplicação na Física e na Química é aquela utilizada para retratar a Lei de Boyle. Ela tem a forma

$$V = \frac{C}{P}$$

em que V é o volume de um gás, P é a pressão a que está submetido e C é um valor constante. Esse é um caso em que as variáveis dependente e independente, respectivamente, V e P são inversamente proporcionais.

Para uma maior facilidade, agilidade e compreensão na representação das funções, de modo geral, iremos representá-las como f(x), ou seja, y = f(x). Dessa forma, a Lei de Boyle pode ser expressa por

$$f(x) = \frac{C}{x}$$

em que f(x) é o volume do gás e x é a pressão a que está submetido.

Utilizaremos esse tipo de notação para as funções abordadas nesse livro. Logicamente, poderão ser utilizadas outras letras, mas a indicação da função será, geralmente, sucedida pela indicação da variável independente entre parênteses. A função f(x) acima pode também ser escrita como

$$V(P) = \frac{C}{P}$$

Considerando, por exemplo, uma constante C = 1, e utilizando a notação de função, podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Note que tal função não pode ser calculada para x = 0, pois a forma $\frac{1}{0}$ é indeterminada (não é possível realizar a divisão por zero). No entanto, é possível observar o comportamento da função à medida que x se aproxima de zero.

Nos dois exemplos apresentados, as variáveis independentes ficam restritas a valores determinados pelo contexto das situações em que estão sendo aplicadas. No primeiro caso, por exemplo, a variável independente x assume somente, como vimos, valores naturais. No

segundo caso, x assume qualquer valor real positivo. Mas tais funções podem ser aplicadas em outras diversas situações. Vamos, portanto, considerar, a partir de agora, as funções de forma teórica. Isto é, utilizaremos as funções já apresentadas, mas com seus domínios não restritos às aplicações reais, para discutir alguns aspectos teóricos no que diz respeito a seus comportamentos.

EXEMPLO 1.3

A função f(x) = 2.000 + 5x pode assumir infinitos valores a partir de outros infinitos que atribuímos à variável x. Não há, nesse caso, nenhum valor real que, atribuído a x, impossibilite o cálculo de y. Vamos analisar o comportamento dessa função para x, por exemplo, se aproximando do valor 3.000. Costumamos dizer: *para x tendendo a 3.000*.

Note que, primeiro, essa aproximação ocorrerá pela direita (no eixo x), ou por valores maiores que 3.000 (ver tabela 1.1) e, depois, pela esquerda, ou seja, por valores menores que 3.000 (ver tabela 1.2).

X	F(X)
2.800	$f(2.800) = 2.000 + 5 \cdot 2.800 = 16.000$
2.900	$f(2.900) = 2.000 + 5 \cdot 2.900 = 16.500$
2.950	$f(2.950) = 2.000 + 5 \cdot 2.950 = 16.750$
2.980	$f(2.980) = 2.000 + 5 \cdot 2.980 = 16.900$
2.990	$f(2.990) = 2.000 + 5 \cdot 2.990 = 16.950$
2.999	$f(2.999) = 2.000 + 5 \cdot 2.999 = 16.995$

Tabela 1.1

Não é difícil perceber que, à medida que x tende a 3.000, pela esquerda, o valor de f(x) tende a 17.000. Vamos ver, pela tabela 1.2, o que acontece quando x se aproximada de 3.000 pela direita.

X	F(X)
3.200	$f(3.200) = 2.000 + 5 \cdot 3.200 = 18.000$
3.100	$f(3.100) = 2.000 + 5 \cdot 3.100 = 17.500$
3.050	$f(3.050) = 2.000 + 5 \cdot 3.050 = 17.250$

X	F(X)
3.020	$f(3.020) = 2.000 + 5 \cdot 3.020 = 17.100$
3.010	$f(3.010) = 2.000 + 5 \cdot 3.010 = 17.050$
3.001	$f(3.001) = 2.000 + 5 \cdot 3.001 = 17.005$

Tabela 1.2

Como esperado, à medida que x tende a 3.000 pela esquerda, o valor da função f(x) tende a 17.000 também. Podemos, então, dizer que o limite da função f(x), quando x tende a 3.000, é igual a 17.000. A notação utilizada para isso é:

$$\lim_{x \to 3.000} f(x) = 17.000$$

EXEMPLO 1.4

Com relação à função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, para x $\mathbb{R}^*$ (note que x pode assumir qualquer valor real não nulo), vamos ver o que acontece com seus valores à medida que x se aproxima de 0 (zero), tanto pela direita como pela esquerda. A tabela 1.3 a seguir mostra o comportamento da função para valores de x tendendo a 0 (zero) pela direita (por valores maiores que zero).

X	F(X)
3	$f(3) = \dfrac{1}{3} = 0,3333...$
2	$f(2) = \dfrac{1}{2} = 0,5$
1	$f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$
0,5	$f(0,5) = \dfrac{1}{0,5} = 2$
0,1	$f(0,1) = \dfrac{1}{0,1} = 10$

X	F(X)
0,01	$f(0,01) = \frac{1}{0,01} = 100$
0,001	$f(0,001) = \frac{1}{0,001} = 1.000$
0,0001	$f(0,0001) = \frac{1}{0,0001} = 10.000$

Tabela 1.3

Não é preciso muito esforço para perceber que, se continuarmos tomando valores para x cada vez mais próximos de zero, a função assumirá valores cada vez maiores. Nesse caso, podemos dizer que o limite da função $f(x) = \frac{1}{x}$, para x tendendo a zero pela direita, é igual a $+\infty$ (ou, simplesmente, ∞). Notaremos por:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Agora, vejamos o que acontece quando x tende a zero pela esquerda (tabela 1.4).

X	F(X)
–3	$f(-3) = \frac{1}{-3} = -0,3333...$
–2	$f(-2) = \frac{1}{-2} = -0,5$
–1	$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$
–0,5	$f(-0,5) = \frac{1}{-0,5} = -2$
–0,1	$f(-0,1) = \frac{1}{-0,1} = -10$
–0,01	$f(-0,01) = \frac{1}{-0,01} = -100$
–0,001	$f(-0,001) = \frac{1}{-0,001} = -1.000$

X	F(X)
−0,0001	$f(-0,0001) = \dfrac{1}{-0,0001} = -10.000$

Tabela 1.4

Aqui, também não é necessário muito esforço para notar que, à medida que x se aproxima de zero pela esquerda, a função f (x) decresce indefinidamente, ou seja, tende a $-\infty$. A notação matemática utilizada para representar esse limite é:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

O gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é apresentado a seguir. Note, como vimos através dos cálculos acima, que os seus limites laterais, para x tendendo a zero, são diferentes, isto é, não convergem para o mesmo valor. Quando isso acontece, dizemos simplesmente que o $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe. Na seção 1.4 trataremos com mais detalhes dos limites laterais.

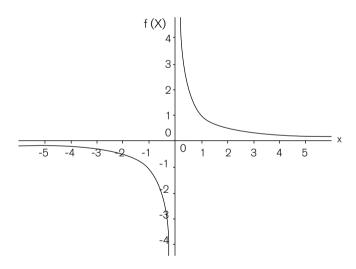



Figura 1.1

A partir do desenvolvimento exposto no exemplo 1.4, podemos definir, de maneira informal, o limite de uma função.

Definição informal de limite

O limite de uma função f (x) quando x tende a a é igual a L, se for possível tornar os valores dessa função tão próximos de L quanto quisermos, para valores arbitrários de x, suficientemente próximos de a, mas diferentes de a. Simbolicamente, representamos:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = L \tag{1.1}$$

1.1.1 Aplicações dos limites: introdução

Os limites, como vimos, são úteis no conhecimento da tendência do comportamento das funções matemáticas e isso os torna essenciais na resolução de inúmeros problemas que são temas do Cálculo Diferencial Integral. E tais problemas são relacionados com diversas áreas do conhecimento. Dois problemas clássicos em que aplicamos o conceito de limites são: o problema da reta tangente a uma curva e o problema de cálculo de áreas (sob gráficos de uma função). Eles serão, neste capítulo, apenas apresentados, mas não discutidos, pois, para podermos resolvê-los é preciso uma maior familiarização com o assunto. Por esse motivo, tais problemas serão retomados nos próximos capítulos, à medida que forem apresentados os conteúdos necessários a uma melhor compreensão do processo de resolução dos mesmos.

Além desses dois problemas, há outros que serão abordados ao longo deste livro, como, por exemplo, o problema da determinação da velocidade instantânea de um móvel.

1.1.1.1 O problema da reta tangente a uma curva

Muitos problemas, nas mais diversas áreas do conhecimento, podem ser resolvidos através de uma análise mais detalhada do comportamento de funções matemáticas. E esse detalhamento, muitas vezes, passa pela análise de taxas instantâneas de variação de funções que modelam os fenômenos estudados.

Na Física, por exemplo, no estudo do movimento, há funções que relacionam a posição de um móvel com o tempo. À medida que o tempo passa, a posição varia. É possível, então, determinar, a partir desse tipo de função, a variação

da posição em um intervalo de tempo. Se dividirmos a variação ocorrida na posição do móvel pelo intervalo de tempo, teremos a velocidade média do móvel nesse intervalo. Mas, e se desejarmos determinar a velocidade desse móvel em um instante específico (e não num intervalo)? Como devemos proceder? Veremos, mais adiante, como resolver esse problema utilizando a noção de limite e, mais tarde, através do cálculo de ***derivadas*** de uma função (tema que começará a ser abordado no próximo capítulo).

Uma função de ampla aplicação na Economia é a que se refere à relação entre o custo total de produção e a quantidade produzida de determinado bem ou utilidade. É a função Custo Total (C_T). Quando se aumenta a quantidade produzida desse bem, há um aumento no seu custo total. Se dividirmos a variação ocorrida no custo pela variação ocorrida na quantidade, teremos o custo médio (por unidade) de produção. Se desejamos determinar o custo de produção para uma unidade adicional, podemos utilizar a Função Custo Marginal (C_{mg}) que pode ser obtida a partir do cálculo do Custo Médio para um intervalo de produção que tende a zero. Também , nesse caso, vemos a necessidade da utilização da noção de limite de uma função.

Nesses dois casos (e tem tantos outros), podemos representar (e resolver) graficamente os problemas através da determinação da reta tangente a uma curva.

Considere, por exemplo, uma função f(x) cujo gráfico está representado a seguir .

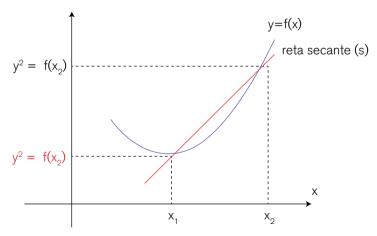



Figura 1.2

De forma geral, dada uma função y = f(x) e dois pontos x_1 e x_2 distintos do seu domínio. A reta s que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ é denominada ***reta secante*** à curva y = f(x).

O coeficiente angular m dessa reta é dado por

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

em que

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

é a variação ocorrida em y e

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h$$
$$\text{Também } \Delta x = h$$

é a variação ocorrida na variável x.

No gráfico a seguir , veja representadas as variações de y e de x, além do ângulo de medida θ formado entre a reta secante e uma linha horizontal. O coeficiente angular m da reta secante pode também ser dado pela tangente do ângulo θ e indica a ***taxa de variação média*** da função f(x) no intervalo considerado $[x_1, x_2]$, isto é, seu valor nos informa qual foi o aumento (ou decréscimo) médio de y para cada unidade de x.

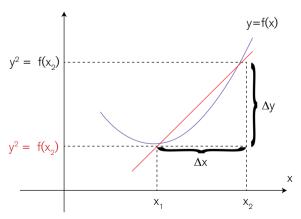



Figura 1.3

À medida que diminuímos o intervalo Δx, aproximando x_2 de x_1 (mantendo fixo o valor x_1), podemos perceber que a nova reta secante terá coeficiente angular diferente da reta anterior (a medida do ângulo θ sofrerá alteração). Dessa forma, vamos obtendo taxas médias de variação para intervalos cada vez menores. Se quisermos determinar o coeficiente angular da reta tangente à curva y =f(x) no ponto (x_1 , y_1), devemos considerar o valor de Δy para $x_2 \rightarrow x_1$ (lê-se: x_2 tendendo a x_1) ou, equivalentemente, para $\Delta x \rightarrow 0$. Em outras palavras, para se determinar o coeficiente angular da ***reta tangente***, devemos diminuir indefinidamente o intervalo considerado. Veja, no gráfico a seguir, uma representação semelhante à do gráfico anterior , mas considerando um intervalo menor.

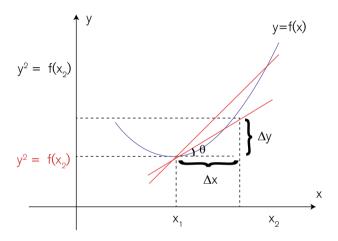



Figura 1.4

Podemos, então, concluir que a taxa de variação (instantânea ou pontual) de uma função y = f(x), quando x = x_1 é dada pela taxa de variação média dessa função quando $x_2 \rightarrow x_1$. Isso significa dizer que a taxa de variação instantânea de uma função y = f(x), para um valor (ponto) específico de x, é dada pelo coeficiente angular da reta tangente a essa curva y = f(x) nesse ponto. Podemos, portanto, escrever:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1.2)$$

Como $\Delta x = x_2 - x_1$, então podemos considerar que $x_2 = x_1 + \Delta x$. Além disso, o valor da função para x_2 pode ser denotado por $f(x_1 + \Delta x)$. Sendo assim, podemos substituir, na expressão (1.2), Δy por $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$. Portanto, a expressão pode ser reescrita na forma:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{1.3}$$

O gráfico a seguir mostra a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_1. Note que tal reta pode ser obtida a partir da determinação das retas secantes para intervalos cada vez menores de Δx.

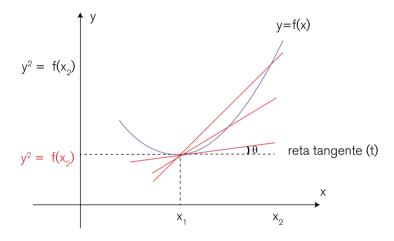



Figura 1.5

Veja, no exemplo a seguir, como obter o coeficiente angular da reta tangente à uma parábola (gráfico que representa uma função quadrática), num ponto específico. Nos capítulos 2 e 3, veremos como determinar tal coeficiente de uma forma muito mais prática. Mas para que isso aconteça, é importante que você se familiarize com o assunto deste capítulo.

EXEMPLO 1.5

Considere a função $f(x) = x^2 - 2x + 3$. O coeficiente angular da reta tangente à f(x) no ponto de abscissa x = 2 pode ser dado através do cálculo da expressão (1.3) considerando x1 = 2:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \tag{1.4}$$

A expressão

$$\frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

não é contínua para $\Delta x = 0$, ou seja, ela não está definida para tal valor. Então, é preciso encontrar uma outra forma de se calcular o limite apresentado em (1.4). Através de manipulações algébricas será possível chegar ao resultado desejado. Vejamos a seguir.

Como,

$$\begin{aligned} f(2+\Delta x) &= (2+\Delta x)^2 - 2(2+\Delta x) + 3 \\ &= 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4 - 2\Delta x + 3 \\ &= (\Delta x)^2 + 2\Delta x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 \\ &= 4 - 4 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

podemos reescrever a expressão como:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x + 3 - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

Fatorando a expressão (coloque Δx em evidência e, em seguida, efetue o seu cancelamento com o denominador), obtemos:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2) \end{aligned}$$

Agora, podemos realizar a substituição de Δx por 0, para calcular o limite, pois, a expressão Δx + 2 é contínua para Δx = 0. Portanto:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2) \\ &= 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Quando há pequenas alterações de valores da variável independente x, as alterações consequentes na variável dependente f(x) podem ocorrer de forma moderada também ou de forma mais brusca. Falaremos mais adiante sobre esses tipos de comportamentos das funções. No entanto, entre as aplicações que podemos fazer desse conceito matemático, em particular, da determinação da reta tangente (e da sua inclinação) a uma curva, uma das principais diz respeito ao cálculo de taxas de variações. Isto é, qual é o efeito que uma pequena (mas, muito pequena mesmo!) variação da variável x provoca na variável y. Um exemplo clássico (e bem didático) desse tipo de uso dos limites é aquele em que a variável x representa o tempo (instante) de percurso de um móvel e y é a sua posição em cada instante. Imagine-se viajando de Ribeirão Preto para Franca. Podemos considerar um percurso, portanto, de aproximadamente 85 km. O tempo total de viagem foi de 1h. Facilmente concluímos que a velocidade média nesse percurso foi de 85 km/h. Até aí tudo bem. Mas será que em todos os instantes, durante esse percurso, sua velocidade manteve-se em 85 km/h? Certamente que não. Em alguns momentos sua velocidade foi maior, em outro, menor. Você pode até ter parado em dado instante. Você pode, a cada instante, conhecer sua velocidade observando o velocímetro de seu automóvel.

A velocidade média é considerada uma taxa de variação média da função posição em relação ao tempo (como a taxa média de variação que vimos agora há pouco). A velocidade a cada instante, ou velocidade instantânea, é uma taxa de variação instantânea e a sua determinação ocorre através do cálculo de limites.

EXEMPLO 1.6

Considere uma partícula em movimento cuja posição em relação ao tempo seja dada pela função $s(t) = -t^2 + 6t$, com t dado em segundos (s) e s em metros (m). A seguir, sua representação gráfica.

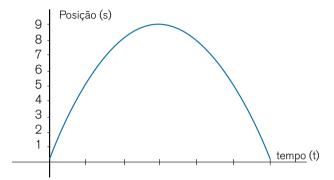



Figura 1.6

Note, pelo gráfico, que no instante t =1 s, a partícula está na posição s = 5 m. Isso pode ser representado matematicamente por s(1) = 5. No gráfico a seguir, este ponto será representado por A. Consideraremos, também , o ponto B_1 de coordenadas (3,9), isto é, o ponto que mostra que no instante t = 3 s a partícula está na posição s = 9 m. Neste intervalo de tempo, a velocidade média da partícula pode ser dada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 5}{2} = 2\ m/s$$

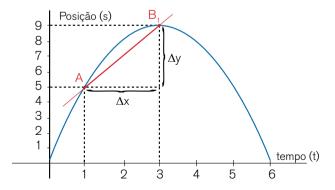



Figura 1.7

Tomando um ponto B_2 mais próximo de A, será possível perceber uma alteração na inclinação do segmento de reta que une tais pontos. Isso indica que ocorreu alteração da velocidade média. Vamos considerar o ponto B_2 de coordenadas (2,8). Isso significa que no instante t = 2 s a partícula está na posição s = 8 m.

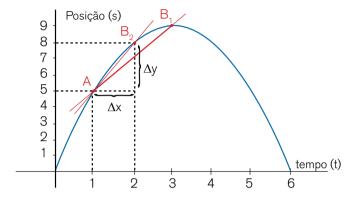



Figura 1.8

De forma semelhante à anterior, podemos determinar a velocidade média da partícula para esse novo intervalo. Veja:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{8 - 5}{1} = 3\ m/s$$

Observe bem as figuras 1.7 e 1.8 e note que a inclinação da reta secante na figuras 1.8 é maior (mais acentuada) do que a da reta secante da figura 1.7. E não por coincidência, a velocidade média no intervalo representado na segunda figura é maior do que a da primeira. Podemos diminuir ainda mais o intervalo considerado (sempre iniciando pelo ponto A). À medida que consideramos esses intervalos cada vez menores, vamos nos aproximando da determinação da velocidade da partícula no ponto A, isto é, no instante t = 1 s. Para isso, devemos calcular a velocidade média $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ para intervalos cada vez menores ou calcular o limite de $\frac{\varnothing s}{\varnothing t}$ para Δt tendendo a zero. Para efetuar o cálculo desse limite, vamos considerar que abscissa t aproxima-se cada vez mais do valor t = 1 s. Sendo assim, podemos indicar:

$$t = 1 + \Delta t$$

Precisamos, agora, encontrar uma forma de expressar Δs, que é a variação da posição (ou a distância percorrida) da partícula no intervalo de tempo Δt. No instante t = 1 s, a posição ocupada pela partícula é dada, em metros, por $s(1) = -1^2 + 6 \cdot 1 = 5$. Já no instante genérico $t = 1 + \Delta t$, a posição ocupada pela partícula é

$$\begin{aligned} s(1+\Delta t) &= -(1+\Delta t)^2 + 6(1+\Delta t) \\ &= -\left[1 + 2\Delta t + (\Delta t)^2\right] + 6 + 6\Delta t \\ &= -1 - 2\Delta t - (\Delta t)^2 + 6 + 6\Delta t \\ &= 5 + 4\Delta t - (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta s &= s(t) - s(1) \\ &= s(1+\Delta t) - s(1) \\ &= 5 + 4\Delta t - (\Delta t)^2 - 5 \\ &= 4\Delta t - (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Então, a velocidade da partícula no instante t = 1 s pode ser dada por:

$$\begin{aligned} v(1) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\Delta t - (\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(4 - \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (4 - \Delta t) \\ &= 4 - 0 \\ &= 4 \ m/seg \end{aligned}$$

Observe, na figura 1.9, que, à medida que diminui o intervalo Δt considerado, as *retas secantes* obtidas aproximam-se, cada vez mais, da *reta tangente* à curva no ponto em que t = 1.

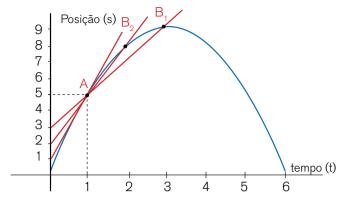



Figura 1.9

É provável que você esteja se perguntando se não é muito trabalho apenas para determinar a velocidade em único instante. Realmente, é um processo um tanto exaustivo, principalmente, considerando que se desejarmos determinar a velocidade dessa partícula em outro instante qualquer, teremos que realizar todo o processo de cálculo novamente. Imagine, então, se a função que determina a posição da partícula for mais complexa. Mas, não se preocupe. No próximo capítulo veremos um processo bem mais ágil e rápido para se determinar taxas de variação instantâneas (como a velocidade instantânea). Mas para isso é de fundamental importância que você compreenda o significado e o cálculo de limites de funções.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Uma torneira despeja água em um tanque, cujo volume V (em m3) em função do tempo t (em min) é dado por $V(t) = 2t^2 + 3t$. A taxa de variação do volume V em função do tempo t, que pode ser expressa por V/t, é denominada vazão da torneira. Vamos representá-la por q. Podemos determinar tanto a vazão média da torneira em um intervalo de tempo como a vazão em um instante específico ou vazão instantânea.

a) Determine a vazão média da torneira entre os instantes t = 1 min e t = 3 min.

b) Determine também a vazão média dessa torneira entre os instantes t = 1 min e t = 2 min.

c) A partir dos resultados dos itens (a) e (b), é possível determinar, mesmo que de forma aproximada, a vazão da torneira no exato instante t = 1 min? Como podemos chegar a tal resultado?

Resolução:

a) Para determinar a vazão média qm entre os instantes t = 1 min e t = 3 min é preciso, primeiramente, determinar o volume V do tanque em cada um desses instantes. Temos, portanto:

- no instante t = 1 min ⇒ $V(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5\ m^3$
- no instante t = 3 min ⇒ $V(1) = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 = 27\ m^3$

Logo, concluímos que a vazão média, nesse intervalo foi de:

$$q_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(3) - V(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 5}{2} = 11\ m^3 / \text{min}$$

b) A vazão média entre os instantes t = 1 min e t = 2 min é calculado de forma análoga. Veja:

- no instante t = 1 min ⇒ $V(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5\ m^3$
- no instante t = 2 min ⇒ $V(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 14\ m^3$

Logo, concluímos que a vazão média, nesse intervalo foi de:

$$q_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(2) - V(1)}{2 - 1} = \frac{14 - 5}{1} = 9\ m^3 / \text{min}.$$

c) A partir dos resultados obtidos em (a) e (b), pode-se perceber que, ao diminuir o intervalo (partindo do mesmo instante), houve redução na vazão. Isso nos dá um indício de que, com o passar do tempo, a vazão torneira torna-se maior. Mas , ainda assim fica difícil estimar a vazão que ocorre no instante exato 1 min. Calcular a vazão média para mais alguns intervalos, tais como de 1 min a 1,5 min, ou de 1 min a 1,25 min, poderia ajudar a determinar o valor esperado. Mas, se calcularmos o limite da vazão média (taxa média de variação do volume em relação tempo) para um intervalo Δt se aproximando de zero, poderemos determinar exatamente a vazão instantânea em t = 1 min. Pois, então, vamos aos cálculos. Note que será necessário um trabalho algébrico semelhante ao utilizado no exemplo 1.6 para tornar possível o cálculo do limite proposto. Consideraremos um intervalo de tempo que vai de 1 min até t min e faremos t tender a 1. Isso equivale a fazer Δt (que é igual a t – 1) tender a zero. Como Δt = t – 1, podemos escrever:

$$t = 1 + \Delta t$$

Além disso, a função V(t) = 2t² + 3t. pode ser escrita, de forma equivalente, como:

$$\begin{aligned} V(t) &= V(1+\Delta t) \\ &= 2(1+\Delta t)^2 + 3(1+\Delta t) \\ &= 2\left[1+2(\Delta t)+(\Delta t)^2\right]+3+3(\Delta t) \\ &= 2+4(\Delta t)+2(\Delta t)^2+3+3(\Delta t) \\ &= 5+7(\Delta t)+2(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Também já vimos que V(1) = 5 m³. Portanto, a vazão da torneira no instante t = 1 min será dada por:

$$\begin{aligned} q(1) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t)-V(1)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(1+t)-V(1)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{5+7(\Delta t)+2(\Delta t)^2}^{V(1+t)} - \overbrace{5}^{V(1)}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{7(\Delta t)-(\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t\left(7-\Delta t\right)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0}\left(7-\Delta t\right) \\ &= 7-0 \\ &= 7\ m^3/\min \end{aligned}$$

1.1.1.2 O problema do cálculo da área sob o gráfico de uma função

Calcular a área de figuras geométricas conhecidas, tais como quadrados, retângulos, pentágonos, hexágonos, e tantas outras conhecidas, não é tarefa muito difícil, pois, é possível aplicar fórmulas ou decompor as figuras para se chegar

ao resultado esperado. Mesmo de figuras como o círculo ou setores circulares, temos como obter as áreas através da aplicação de fórmulas conhecidas. Mas como podemos calcular áreas de figuras em que, pelo menos, um dos lados é uma curva gerada por uma função qualquer?

Vamos considerar o exemplo seguinte para ilustrar como poderemos chegar à área desejada nesses casos.

EXEMPLO 1.7

Como podemos calcular a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ compreendida entre os valores $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$?

Na figura 1.10, é possível observar a função f(x) e a região cuja área deverá ser determinada.

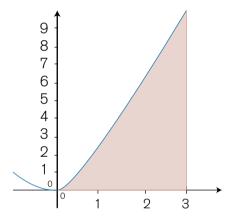



Figura 1.10

Podemos aproximar o valor dessa área, dividindo a região sob o gráfico em retângulos. Com o intuito de facilitar nossos cálculos e representações, vamos considerar retângulos com bases de mesma medida. A soma das áreas desses retângulos será uma primeira aproximação que utilizaremos para o cálculo da área sob o gráfico. Vejamos.

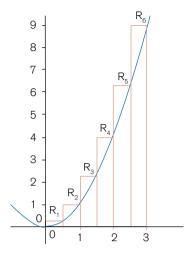



Figura 1.11

Como a variação total em x é igual a $x_1 - x_2 = 3 - 0 = 3$ e a medida da base de cada retângulo é igual a 0,5, então, a quantidade de retângulos é igual a 3/0,5 = 6. A altura de cada retângulo será dada pelo valor que a função f(x) assume para o valor de x determinado pelo lado direito desse retângulo, isto é, a altura de cada retângulo será determinada pelo segmento de reta vertical com extremos determinados pela intersecção do seu lado direito com o eixo x e com o gráfico da função. Com base na figura 1.11, definimos as seguintes alturas e áreas para os retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_6$, apresentados. Vale lembrar que todos eles têm bases de medidas iguais a 0,5. O retângulo R_1 tem seu lado direito sobre o valor de abscissa x = 0,5; o retângulo R_2, sobre o valor x = 1,0; e assim por diante, sempre variando de 0,5 em 0,5. Sendo assim, para determinar a altura do retângulo R1, devemos calcular o valor da função $f(x) = x^2$ para x = 0,5; para o retângulo R_2, tomamos x = 1,0; e da mesma forma para os demais retângulos, sempre calculando o valor da função f (x) para respectivos valores de x sobre os quais situam-se seus lados direitos. A tabela 1.5 apresenta as alturas e as áreas de cada um dos retângulos da figura 1.11, bem como a soma de tais áreas.

RETÂNGULO	ALTURA	ÁREA
R_1	$h_1 = f(0,5) = 0,5^2 = 0,25$	$A_1 = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$
R_2	$h_2 = f(1,0) = 1,0^2 = 1,00$	$A_2 = 0,5 \cdot 1,00 = 0,500$
R_3	$h_3 = f(1,5) = 1,5^2 = 2,25$	$A_3 = 0,5 \cdot 2,25 = 1,125$
R_4	$h_4 = f(2,0) = 2,0^2 = 4,00$	$A_4 = 0,5 \cdot 4,00 = 2,000$

RETÂNGULO	ALTURA	ÁREA
R_5	$h_5 = f(2,5) = 2,5^2 = 6,25$	$A_5 = 0,5 \cdot 6,25 = 3,125$
R_6	$h_6 = f(3,0) = 3,0^2 = 9,00$	$A_6 = 0,5 \cdot 9,00 = 4,500$
		Soma das áreas: 11,375

Tabela 1.5 – Alturas e áreas dos retângulos da figura 1.11 e soma de suas áreas

O valor 11,375 é uma primeira aproximação que obtemos para a área sob o gráfico de f (x) e, pela análise do gráfico da figura 1.11, é possível concluir que esse valor é maior que o valor da área sob o gráfico. Mas podemos diminuir a diferença existente entre esses valores, aumentando a quantidade de retângulos, o que, consequentemente, nos fará diminuir as medidas de suas bases. Vamos considerar, por exemplo, retângulos com bases de medidas iguais a 0,25 para obter uma aproximação melhor que a anterior.

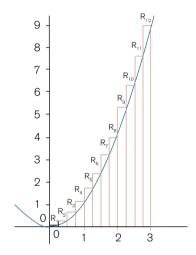



Figura 1.12

Note, agora, que a área ocupada pelos retângulos está mais próxima da área total sob o gráfico. Mas, ainda há diferença entre elas. No entanto, é possível diminuir cada vez mais essa diferença, tomando, para isso, retângulos com bases cada vez menores (o que aumentará, indefinidamente, a quantidade de retângulos). Na figura 1.12, há uma grande quantidade de retângulos e é possível perceber que a diferença entre as áreas é menor que nos casos apresentados na figura 1.11. Na tabela 1.6 são apresentados os cálculos utilizados para se chegar a essa nova aproximação para a área desejada, bem como seu valor, que é a soma das áreas dos retângulos R1, R2, . . . , R12 apresentados na figura 1.12.

RETÂNGULO	ALTURA	ÁREA
R_1	$h_1 = f(0,25) = 0,25^2 = 0,0625$	$A_1 = 0,25 \cdot 0,0625 = 0,015625$
R_2	$h_2 = f(0,50) = 0,50^2 = 0,2500$	$A_2 = 0,25 \cdot 0,2500 = 0,062500$
R_3	$h_3 = f(0,75) = 0,75^2 = 0,5625$	$A_3 = 0,25 \cdot 0,5625 = 0,140625$
R_4	$h_4 = f(1,00) = 1,00^2 = 1,0000$	$A_4 = 0,25 \cdot 1,0000 = 0,250000$
R_5	$h_5 = f(1,25) = 1,25^2 = 1,5625$	$A_5 = 0,25 \cdot 1,5625 = 0,390625$
R_6	$h_6 = f(1,50) = 1,50^2 = 2,2500$	$A_6 = 0,25 \cdot 2,2500 = 0,562500$
R_7	$h_7 = f(1,75) = 1,75^2 = 3,0625$	$A_7 = 0,25 \cdot 3,0625 = 0,765625$
R_8	$h_8 = f(2,00) = 2,00^2 = 4,0000$	$A_8 = 0,25 \cdot 4,00 = 1,000000$
R_9	$h_9 = f(2,25) = 2,25^2 = 5,0625$	$A_9 = 0,25 \cdot 5,0625 = 1,265625$
R_{10}	$h_{10} = f(2,50) = 2,50^2 = 6,2500$	$A_{10} = 0,25 \cdot 6,2500 = 1,562500$
R_{11}	$h_{11} = f(2,75) = 2,75^2 = 7,5625$	$A_{11} = 0,25 \cdot 7,5625 = 1,890625$
R_{12}	$h_{12} = f(3,00) = 3,00^2 = 9,0000$	$A_{12} = 0,25 \cdot 9,0000 = 2,250000$
		Soma das áreas: 10,156250

Tabela 1.6 – Alturas e áreas dos retângulos da figura 1.12 e soma de suas áreas

Perceba que a soma obtida na tabela 1.6 é, como se esperava, menor que a apresentada na tabela 1.5. Se continuarmos diminuindo as medidas das bases dos retângulos utilizados para aproximar o valor da área desejada (e, consequentemente, aumentando a quantidade de retângulos), conseguiremos valores cada vez mais próximos do real valor dessa área. A ideia, aqui, é fazer com que as medidas das bases se aproximem de zero. Assim, a soma das áreas tenderá ao valor que desejamos encontrar.

Vamos, então, considerar a divisão da área A em n retângulos cujas medidas das bases são todas iguais a Δx e as medidas de suas alturas são dadas por h1, h2, ... , hn (que são obtidas atribuindo-se o valor de x, respectivamente, sobre o qual apoia-se o lado direito de cada retângulo). Sendo assim, podemos escrever a área A do gráfico sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, entre os valores $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ da seguinte forma

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\Delta x \cdot (h_1 + h_2 + \ldots + h_n) \right]$$

ou, de forma resumida, como

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i \right]$$

No capítulo 4, veremos como calcular esse tipo de área através do uso de integração, que é um processo matemático que possui ligação com os limites de funções.

Nesse processo de cálculo da área sob o gráfico de uma função, podemos, também, obter aproximações utilizando retângulos cujas alturas são determinadas pelo encontro de seus lados esquerdos com a função em questão. Isso significa que a soma das áreas dos retângulos seria menor que o valor da área requerida. Da mesma forma, poderíamos definir a altura de cada retângulo através da linha vertical que passa pelo centro de sua base até o encontro com a função. Poderíamos, ainda, definir essa altura a partir de qualquer segmento vertical traçado a partir de qualquer ponto da base inferior do retângulo até a intersecção com o gráfico da função. Seja qual for a escolha, o resultado final, isto é, o cálculo da área sob o gráfico através de limites, será o mesmo.

1.2 Propriedades básicas dos limites

Já calculamos os limites de algumas funções através da substituição de valores simplesmente ou utilizando manipulações algébricas. As funções apresentadas, na verdade, não nos causaram grandes dificuldades. Mas há uma diversidade de funções que certamente surgirão nas aplicações que podem ser feitas dos limites que não são tão elementares. E isso poderá gerar dificuldades além das vistas até o momento. Para facilitar o cálculo dos limites de tais funções, há algumas propriedades que podem ser utilizadas nesses cálculos. Elas são apresentadas a seguir e você verá que, algumas delas, nós já utilizamos de forma intuitiva nas seções anteriores.

Propriedade 1: limite de uma função constante

$$\boxed{\lim_{x \to a} k = k}$$

Uma função f (x) = k, sendo k constante, assume valor igual a k para qualquer que seja o valor da variável x. Sendo assim, o limite dessa função é sempre igual a k, independentemente do valor ao qual x está tendendo.

EXEMPLO 1.8

a) $\lim_{x \to -2} (7) = 7$

b) $\lim_{x \to -2} (-0,25) = -0,25$

c) $\lim_{x \to -2} (\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{4}$

Propriedade 2: limite da soma ou da diferença entre funções

$$\boxed{\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)}$$

O limite de uma soma de duas ou mais funções é igual à soma dos limites dessas funções. Da mesma forma, o limite da diferença entre funções é igual à diferença dos limites das mesmas.

EXEMPLO 1.9

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} \left(x^3 - x + 5 \right) &= \lim_{x \to -2} \left(x^3 \right) - \lim_{x \to -2} \left(x \right) + \lim_{x \to -2} \left(5 \right) \\ &= (-2)^3 - (-3) + 5 \\ &= -8 + 3 + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x \to 0}\left(2+\frac{1}{x+2}-0,5x^2\right)=\lim_{x \to 0}(2)+\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x+2}\right)-\lim_{x \to 0}\left(0,5x^2\right)$$
$$=2+\frac{1}{0+2}-0,5\cdot 0^2$$
$$=2+\frac{1}{2}-0$$
$$=\frac{5}{2}$$

Propriedade 3: limite do produto entre constante e função

$$\boxed{\lim_{x \to a}\left[k \cdot f(x)\right]=k \cdot \lim_{x \to a} f(x)}$$

O limite do produto entre uma constante k e uma função f(x) é dado pelo produto entre a constante k e o limite da função f(x).

EXEMPLO 1.10

a) $\lim_{x \to \pi}(3 \cdot \cos x)=3 \cdot \lim_{x \to \pi}(\cos x)=3 \cdot \cos \pi=3 \cdot(-1)=-3$

b) $\lim_{x \to a}\left[-5 \cdot\left(x^2+\log x\right)\right]=-5 \cdot \lim_{x \to a}\left(x^2+\log x\right)=-5 \cdot\left(a^2+\log a\right)=-5a^2-5\log a$

Propriedade 4: limite do produto entre funções

$$\boxed{\lim_{x \to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right]=\lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)}$$

O limite do produto entre duas funções f(x) e g(x) é dado pelo produto entre seus limites.

EXEMPLO 1.11

a) $\lim_{x\to\pi}(\text{sen }x \cdot \cos x) = \lim_{x\to\pi}(\text{sen }x) \cdot \lim_{x\to\pi}(\cos x) = \text{sen }\pi \cdot \cos\pi = 0 \cdot (-1) = 0$

b) $\lim_{x\to 0}\left[x^3 \cdot (5x^2 + 7x - 9)\right] = \lim_{x\to 0} x^3 \cdot \lim_{x\to 0}(5x^2 + 7x - 9) = 0$

Propriedade 5: limite do quociente entre funções

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

desde que $g(a) \neq 0$.

O limite do quociente entre duas funções f(x) e g(x) é dado pelo quociente entre seus limites desde que g(x) seja não nula para o valor ao qual x tende.

EXEMPLO 1.12

a) $\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\text{sen }x}{\cos x}\right) = \frac{\lim_{x\to\pi}(\text{sen }x)}{\lim_{x\to\pi}(\cos x)} = \frac{\text{sen }\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{0^2 - 3\cdot 0 + 1}{0^2 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$

Propriedade 6: limite da potência de uma função

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \lim_{x\to a}[f(x)]^n$$

para qualquer n inteiro positivo.

O limite de uma potência com base f(x) e de expoente n inteiro e positivo é igual ao limite da função f(x) elevado a n.

EXEMPLO 1.13

a) $\lim_{x\to 1}\left(2-\log x^3\right)^2=\left[\lim_{x\to 1}\left(2-\log x^3\right)\right]^2=\left[2-\log 1^3\right]^2=\left[2-0\right]^2=4$

b) $\lim_{x\to \pi}\left(\frac{1+\text{sen } x}{2\cos x}\right)^3=\left[\lim_{x\to \pi}\left(\frac{1+\text{sen } x}{2\cos x}\right)\right]^3=\left[\frac{1+0}{2\cdot(-1)}\right]^3=\left[-\frac{1}{2}\right]^3=-\frac{1}{8}$

Propriedade 7: limite da raiz de uma função

$$\boxed{\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}}$$

para qualquer n inteiro positivo quando f(x) ≥ 0 ou para qualquer n inteiro positivo ímpar quando f(x) < 0.

O limite da raiz n-ésima de uma função f(x) é igual à raiz n-ésima do limite dessa função, desde que n seja um inteiro positivo quando f(x) for nula ou positiva (para qualquer x) ou que n seja um inteiro positivo ímpar quando f(x) negativa.

EXEMPLO 1.14

a) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\sqrt[3]{-16x^4-7}=\sqrt[3]{\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(-16x^4-7\right)}=\sqrt[3]{-16\left(\frac{1}{2}\right)^4-7}=\sqrt[3]{-1-7}=\sqrt[3]{-8}=-2$

b) $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$

1.3 Continuidade

Nas seções anteriores, falamos sobre certas funções não serem contínuas para determinado valor ou intervalos de valores. Vimos, por exemplo, que a função $f(x)=\frac{1}{x}$ não é contínua para x = 0. Portanto, seu domínio é composto por todo $x \in \mathbb{R}^*$.

Vimos, também, que seu gráfico (figura 1.1) não apresenta nenhum ponto de abscissa igual a zero. O gráfico dessa função nunca intercepta o eixo y. Portanto, ele sofre uma interrupção.

De forma intuitiva, podemos estudar a continuidade de uma função através da análise de seu gráfico. Se ele não apresenta nenhuma interrupção, então concluímos que a função é contínua. Se ocorre uma ou mais interrupções, então dizemos que há um ou mais pontos de descontinuidade da função. Vamos ver agora, mais algumas análises de funções com relação à sua continuidade.

EXEMPLO 1.15

A função $f(x)=\frac{1}{x^2}$, cuja representação gráfica está na figura 1.13, também não está definida para x = 0. Portanto, ela é descontínua para a abscissa x = 0.

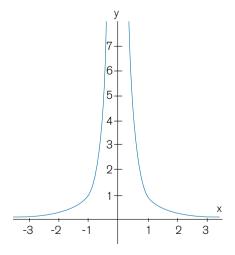



Figura 1.13

EXEMPLO 1.16

Considere a função $f(x) = x^2 + 1$. Este é um exemplo de uma função quadrática cuja representação gráfica é uma parábola, como mostra a figura 1.14

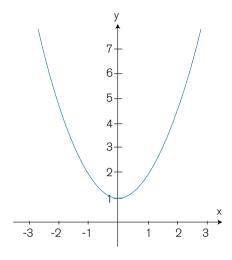



Figura 1.14

Você deve lembrar-se que funções desse tipo tem domínio real ($D = \mathbb{R}$), isto é, ela está definida para todo e qualquer x real. Portanto, é considerada uma função contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 1.17

Seja f(x) a função dada por

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

A condição de existência dessa função é tal que x pode assumir qualquer valor real exceto 3. Isto equivale a dizer que $x - 3 \neq 0$. Não é preciso preocupar-se com a expressão que está no numerador da fração, pois, qualquer que seja o valor de x, ela sempre poderá ser obtida e não há nenhuma restrição sobre seu valor (ela pode, inclusive, ser igual a zero). No entanto, com relação ao denominador, é preciso considerar que ele não pode assumir o valor zero. Mesmo que a expressão "x – 3" possa ser calculada para qualquer que seja o valor de

x, não é permitido que ela seja igual a zero, pois, está posicionada no denominador de uma fração. Portanto, não podemos admitir que x seja igual a 3, isto é, a função f(x) é descontínua para x = 3. Isto, ainda, equivale a dizer que o domínio da função é D ={ $x \in \mathbb{R}$ ./ x – 3.

1.3.1 Propriedades das funções contínuas

Podemos identificar alguns tipos de funções contínuas pela sua forma algébrica. Uma função polinomial f(x), por exemplo, é contínua para qualquer x real. Funções racionais são contínuas para todo x do seu domínio, ou seja, para todo x real tal que seu denominador seja diferente de zero. As funções trigonométricas e as trigonométricas inversas também são contínuas para qualquer valor da variável independente x. Basta lembrarmos do comportamento de seus gráficos: eles não têm nenhum tipo de interrupção.

A partir de funções contínuas, podemos realizar combinações algébricas que geram outras funções também contínuas. Isto é, se as funções f(x) e g(x) para x = c, então também são contínuas as seguintes combinações algébricas:

- $f(x) + g(x)$;
- $f(x) - g(x)$;
- $f(x) \cdot g(x)$;
- $f(x) / g(x)$, contanto que $g(c) \neq 0$;
- $k \cdot f(x)$, para cada k real.

Além disso, a composta das funções contínuas f(x) e g(x) também é contínua.

EXEMPLO 1.18

Dadas as funções contínuas $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = sen(x)$, também são contínuas as funções:

a) $f(x) + g(x) = x^2 + 1 + sen(x)$;

b) $f(x) - g(x) = x^2 + 1 - sen(x)$;

c) f(x) · g(x) = (x² +1) · sen(x);

d) $f(x)/g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{sen(x)}$, para todo x real tal que sen(x) ≠ 0;

e) – 5 · g(x) =– 5 (x² +1);

f) f · g = f(g (x))= sen²(x) + 1;

g) g · f =g(f (x)) = sen(x² + 1).

1.4 Limites laterais

Na seção 1.1, vimos que o limite $L = \lim_{x \to a} f(x)$ só existe se a função f(x) se aproxima de L quando x tende ao valor ***a*** tanto pela direita como pela esquerda, isto é, se aproximarmos x de ***a*** por valores menores que ***a***, a função f(x) se aproxima de L e, se aproximarmos x de ***a*** por valores maiores que ***a***, a função f(x) também se aproxima de L. Nesse caso, dizemos que a função f(x) possui limites bilaterais em x = ***a***.

Simbolicamente, podemos escrever que

$$\exists L = \lim_{x \to a} f(x) \leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Podemos ler a expressão acima da seguinte forma: "existe o limite L de f(x) com x tendendo a ***a*** se, e somente se, o limite de f(x) com x tendendo a ***a*** pela direita é igual ao seu limite tendendo a ***a*** pela esquerda".

EXEMPLO 1.19

A função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, cujo gráfico é um semicírculo de raio 3 com centro em (0,0), tem domínio dado por]–3, 3]. Veja sua representação gráfica na figura 1.15.

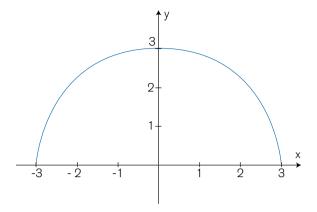



Figura 1.15

Note que a função f(x) assume valores cada vez mais próximos de zero quando $x \to 3^-$, mas não está definida para valores maiores que 3. Portanto, não existe o limite dessa função para $x \to 3$, ou seja, a função não possui limite bilateral em $x = 3$.

Da mesma forma, a função f(x) assume valores cada vez mais próximos de zero quando $x \to 3^+$, mas não está definida para valores menores que -3 . Portanto, também não existe o limite dessa função para $x \to -3$, ou seja, a função não possui limite bilateral em $x = -3$.

Os limites laterais gozam de todas as propriedades apresentadas na seção 1.2 (Propriedades 1-7).

1.5 Limites envolvendo infinito

Em alguns momentos, podemos estar interessados em conhecer o comportamento de uma função f(x) quando $x \to +\infty$ (ou, simplesmente, $x \to \infty$, que significa que x cresce indefinidamente) ou quando $x \to -\infty$ (x decresce indefinidamente). Dizemos que são casos de limites envolvendo o infinito. Vamos ver alguns exemplos em que isso acontece.

EXEMPLO 1.20

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ do exemplo 1.4. Já vimos como ela comporta-se à medida que x tende a zero. Agora, no entanto, estaremos interessados no seu comportamento à medida que x cresce ou decresce indefinidamente ($x \to \pm\infty$).

Não é difícil perceber que se tomarmos valores cada vez maiores para x (x → + ∞) a expressão $\frac{1}{x}$ assumirá valores cada vez mais próximos de zero (mas, nunca zero). Então podemos escrever

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

No caso de x decrescer de forma indefinida, o valor da expressão $\frac{1}{x}$ tenderá também a zero. Escrevemos, nesse caso,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

EXEMPLO 1.21

A função racional $f(x) = \frac{x^3 + x - 7}{3x^3 - x^2 + 1}$ tem expressões polinomiais de mesmo grau, tanto no numerador como no denominador. Se quisermos determinar seu limite quando x tende ao infinito, por exemplo, podemos, inicialmente, dividir tanto o numerador como o denominador por x^3, que é a variável independente da função elevada ao maior grau dos polinômios que compõem tal função. Isso nos permitirá avaliar de forma mais clara para qual valor a função tende. Veja a seguir o processo de cálculo desse tipo de limite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x - 7}{3x^3 - x^2 + 1} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^3 + x - 7\right)/x^3}{\left(3x^3 - x^2 + 1\right)/x^3} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{1 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Se desejarmos calcular o limite da função f(x) para x → −∞, chegaremos ao mesmo resultado, pois as expressões $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x^3}$ também tendem a zero quando x decresce indefinidamente.

Veja, na figura 1.16, a representação gráfica da função $f(x) = \frac{x^3 + x - 7}{3x^3 - x^2 + 1}$

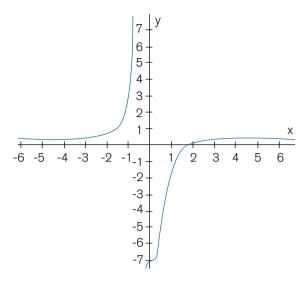



Figura 1.16

EXEMPLO 1.22

Na função racional $g(x)=\dfrac{5x^2-x+2}{2x^2-1}$, o grau do numerador é maior que o do denominador. Nesse caso, para calcular seu limite com x tendendo a ±∞, divida ambos por x elevado ao menor grau. Para ilustrar, vamos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Veja.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-x+2}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(5x^2-x+2\right)/x}{\left(2x-1\right)/x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1+\dfrac{2}{x}}{2-\dfrac{1}{x}}$$

Na expressão acima, o numerador tende a $-\infty$ e o denominador, a 2. Então,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-x+2}{2x-1}=-\infty$$

EXEMPLO 1.23

Considere o limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^2}{7+x^3}$$

Nesse caso, a expressão do denominador tem grau maior que o do numerador. Para resolvê-lo, comece dividindo ambas expressões por x elevado ao maior grau. Vejamos.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^2}{7+x^3} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(4-3x^2\right)/x^3}{\left(7+x^3\right)/x^3}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x}}{\frac{7}{x^3}+1}\\ &= \frac{0-0}{0+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

As propriedades 1 a 7 apresentadas na seção 1.2 também são aplicáveis quando x tende a ∞ ou a –∞. Vamos ver, no exemplo 1.24, como calcular alguns limites utilizando totais propriedades.

EXEMPLO 1.24

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=3-0=3$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\left(5\sqrt{\frac{1}{x}+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}5\cdot\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+4}=5\cdot\sqrt{0+4}=5\cdot 2=10$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{2}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

1.6 Assíntotas verticais e horizontais

Há diversas situações em que, ao determinarmos o limite de uma função f(x) para x tendendo a um certo valor ***a***, concluiremos que a função tende ao infinito (+∞ ou −∞). Isso quer dizer que à medida que x se aproxima de ***a***, a função f(x) cresce indefinidamente (tende a +∞) ou decresce indefinidamente (tende a −∞).

Novamente, tomaremos a função $f(x)=\frac{1}{x}$ do exemplo 1.4 para ilustrar alguns conceitos e procedimentos. Já vimos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Então, podemos afirmar que a reta y = 0 é uma ***assíntota horizontal*** do gráfico de f(x). Na figura 1.17, temos o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x}$ com sua assíntota horizontal.

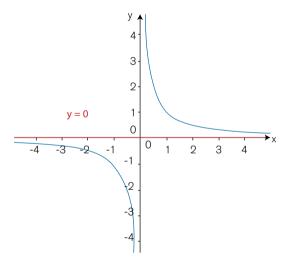



Figura 1.17

Pela análise da figura 1.17 é possível notar que a distância entre o gráfico da função f(x) e uma reta fixa (que, nesse caso, é o eixo x) aproxima-se de zero à medida que a curva (gráfico da função) afasta-se da origem. Podemos, então, dizer que essa curva se aproxima assintoticamente da reta e esta é denominada assíntota do gráfico.

Agora, vamos analisar o comportamento da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quando x aproxima-se de zero. Lembre-se que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ não existe, pois, seus limites laterais $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$ e $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$ são diferentes. Vimos que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

e, analisando o gráfico dessa função, pode-se perceber que a reta x = 0 (eixo y) é sua ***assíntota vertical***. A sua representação está na figura 1.18.

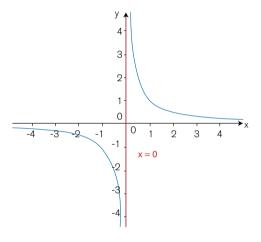



Figura 1.18

De modo geral,

- a reta y = a é uma ***assíntota horizontal*** do gráfico da função f(x) se ocorrer

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=a$$

- a reta x = b é uma ***assíntota vertical*** do gráfico da função f(x) se ocorrer

$$\lim_{x\to b^+} f(x)=\pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$$

Vamos ver alguns exemplos de como determinar (se elas existirem), as assíntotas de uma função.

EXEMPLO 1.25

A função $h(x)=\dfrac{2x+6}{x+1}$ possui duas assíntotas. Vamos calcular os limites necessários para determiná-las, ou seja, determinar o comportamento da função quando x → ± ∞ e quando x → −1, que é o valor que torna o seu denominador igual a zero. Como não podemos efetuar a substituição de x por −1 na função como ela está escrita, vamos reescrevê-la de outra forma. Nesse caso, se dividirmos o numerador pelo denominador, conseguimos obter uma expressão algébrica equivalente. Vejamos.

$$\begin{array}{r|l} 2x+6 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x-2 & \quad 2 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Como a divisão de 2x + 6 por x + 1 resultou em 2 com resto igual a 4, podemos escrever:

$$2x + 6 = 2(x + 1) + 4$$

Sendo assim, a função h(x) pode ser reescrita na forma:

$$h(x)=\frac{2(x+1)+4}{x+1}$$
$$h(x)=\frac{2(x+1)+4}{x+1}+\frac{4}{x+1}$$
$$h(x)=2+\frac{4}{x+1}$$

Agora podemos calcular os limites que desejamos.

- $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+6}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(2+\dfrac{4}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1^+}2+\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=\infty$

- $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x+6}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(2+\dfrac{4}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1^-}2+\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=-\infty$

Até aqui, podemos concluir que y = −1 é uma assíntota horizontal de h(x).
Agora, vamos determinar sua assíntota vertical.

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+6}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{4}{x+1} \right) = \lim_{x \to -\infty} 2 + \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{x+1} \right) = 2 + 0 = 2$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+6}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{4}{x+1} \right) = \lim_{x \to \infty} 2 + \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4}{x+1} \right) = 2 + 0 = 2$

A reta x = 2 é uma assíntota vertical da função h(x).

Veja, na figura 1.19 a representação da função h(x) e de suas assíntotas.

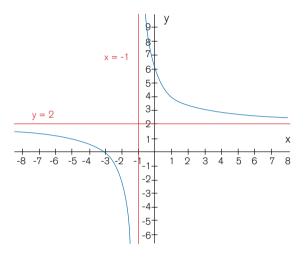



Figura 1.19

EXEMPLO 1.26

Uma função pode ter mais do que uma assíntota vertical (ou, também, mais que uma horizontal). Vamos determinar as assíntotas da função $r(x) = \frac{6}{x^2+9}$.

Como o seu denominador é igual a $x^2 - 9$, então, a função r(x) não está definida para −3 e 3. Note que as retas x = −3 e x =3 são ambas assíntotas verticais da função r(x), pois:

- $\lim_{x \to -3^+} \frac{6}{x^2-9} = \infty$
- $\lim_{x \to -3^-} \frac{6}{x^2-9} = -\infty$
- $\lim_{x \to 3^+} \frac{6}{x^2-9} = \infty$
- $\lim_{x \to 3^-} \frac{6}{x^2-9} = -\infty$

A assíntota horizontal é dada por y = 0, pois:

- $\lim_{x \to \infty} \frac{6}{x^2-9} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x^2-9} = 0$

Veja a representação gráfica da função r(x) e de suas assíntotas na figura 1.20.

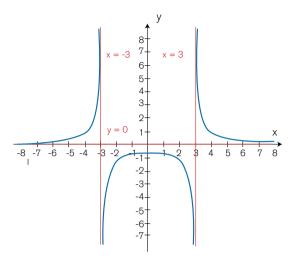



Figura 1.20

EXEMPLO 1.27

Uma função pode possuir infinitas assíntotas. É o caso da função tangente f(x) = tg x. Veja sua representação gráfica na figura 1.21.

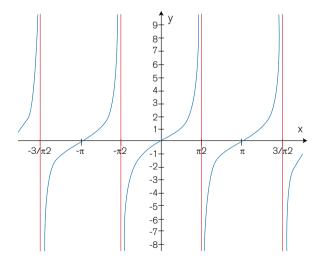



Figura 1.21

1.7 Definição formal de limite

Após abordarmos vários aspectos referentes ao limite de funções e sua noção intuitiva, vamos, agora, apresentar a definição formal de limite.

Mostrar que o limite da função f(x) é igual ao valor l quando x tende a um valor específico x_0 ($x \to x_0$) exige a demonstração de que o intervalo entre f(x) e L pode ser tão pequeno quanto quisermos se x for tão suficientemente próximo de x_0. Para uma melhor compreensão, considere o exemplo a seguir:

EXEMPLO 1.28

Dada a função f(x) = 3x − 2 e considerando que $x_0 = 2$, vamos determinar qual deve ser a distância entre x e $x_0 = 2$ para que y =f(x) fique a uma distância menor do que 3 em relação a um valor específico $y_0 = 4$.

Para solucionar esse problema, devemos determinar para quais valores de x o módulo

$$|y-4|<3$$

Como y = 3x − 2, então a inequação $|y-4|<3$ pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&|y-4|<3\\
&|(3x-2)-4|<3\\
&|3x-6|<3\\
&-3<3x-6<3\\
&-3+6<3x<3+6\\
&3<3x<9\\
&\frac{3}{3}<\frac{3x}{3}<\frac{9}{3}\\
&1<x<3
\end{aligned}$$

Se 1 < x < 3, então podemos concluir (subtraindo 2 de todos os termos dessa inequação) que

$$\begin{aligned}
1-2<x-2<3-2\\
-1<x-2<1\\
|x-2|<1
\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que com x variando uma unidade em torno de $x_0 = 2$, conseguimos manter y variando 3 unidades em torno de $y_0 = 4$.

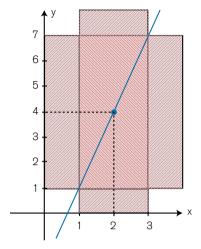



Figura 1.22

EXEMPLO 1.29

Considerando a função do exemplo 1.28 , vamos, agora, determinar qual dever ser a distância entre x e $x_0 = 1$ para que y = f(x) fique a uma distância menor do que 2 em relação a um valor específico $y_0 = 4$. Perceba que estamos diminuindo a distância entre y e y_0. Dessa forma, devemos determinar para quais valores de x o módulo

$$|y-4|<2$$

De forma semelhante ao que ocorre no exemplo 1.28, como y = 3x – 2, então a inequação $|y-4|<2$ pode ser resolvida da seguinte forma:

$$|y-4|<2 \Rightarrow |(3x-2)-4|<2$$
$$|3x-6|<2 \Rightarrow -2<3x-6<2$$
$$-2+6<3x<2+6 \Rightarrow 4<3x<8$$
$$\frac{4}{3}<\frac{3x}{3}<\frac{8}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}<x<\frac{8}{3}$$

Se $\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3}$, então podemos concluir (subtraindo 2 de todos os termos dessa inequação) que

$$\frac{4}{3} - 2 < x - 2 < \frac{8}{3} - 2$$
$$-\frac{2}{3} < x - 2 < \frac{2}{3}$$
$$|x - 2| < \frac{2}{3}$$

Concluímos, portanto, que com x variando $\frac{2}{3}$ em torno de $x_0 = 2$, conseguimos manter y variando 2 unidades em torno de $y_0 = 4$. Veja a representação na figura 1.23 e compare-a com a figura 1.22.

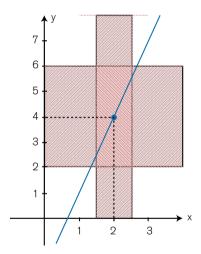



Figura 1.23

Definição formal de limite

De forma geral, considere uma função y = f(x) definida no intervalo aberto (a, b) que contém x_0. Dizemos que a função f(x) tem limite igual a L com x tendendo a x_0, isto é,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se para todo número ε > 0, existe um δ > 0 tal que, para todo x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - L| < \varepsilon$$

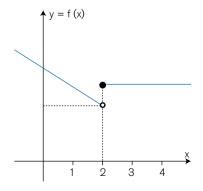
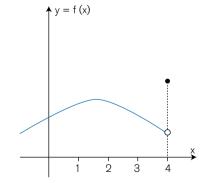
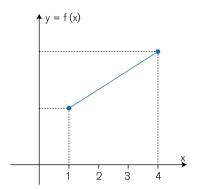
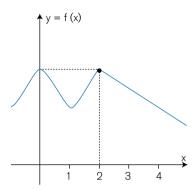
Isso equivale a dizer que por menor que seja a distância δ entre x e x_0 (que é o mesmo que dizer que x tende a x_0), sempre existirá um valor ε, por menor que seja, que é a distância entre f(x) e L.

CONEXÃO

Um *software* voltado a aplicações matemáticos, de grande utilidade e fácil utilização pode ser encontrado no endereço www.geogebra.org . Ele chama-se *Geogebra* e é extremamente útil na elaboração de gráficos e cálculos matemáticos, além de tantos outros recursos. Além disso, há diversos sites que contêm explicações sobre como utilizá-lo. Vale a pena investir um tempo para descobrir suas funcionalidades.

EXERCÍCIO

01. Verifique se as funções, cujos gráficos são apresentados a seguir, são contínuas no intervalo [1, 4]:

a)

b)

c)

d)

02. Verifique se existe o limite $L = \lim_{x \to a} f(x)$ para cada um dos seguintes casos:

a) $f(x) = 3x - 1$ e $a = 0$;

b) $f(x) = \dfrac{5+x}{x^2} - 1$ e $a = -5$;

c) $f(x) = \dfrac{5+x}{x^2} - 1$ e $a = 0$;

d) $f(x) = \begin{cases} \cos(x), \ se \ x \leq \pi \\ sen(x), \ se \ x > \pi \end{cases}$ e $a = \pi$;

03. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x-5}{\sqrt{x+7}}$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x+2}{x}$

c) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{16x^3 - 2}{2x-1}$

d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{h^2 - 2h + 3}{h}$

e) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$

f) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2}$

g) $\lim_{k \to \infty} \dfrac{1}{k^3}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\left(a+x^2\right)-a^2}{x}$

i) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-2x}{x^3+3}$

j) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4-x^3+3}{x^4+2}$

k) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-x}{x^2-9}$

04. Dada a função f(x) = $-x^2 + x + 6$,

a) esboce seu gráfico;

b) calcule sua taxa média de variação para x variando de 1 a 3;

c) desenhe a reta secante ao seu gráfico, passando pelos pontos de abscissas 1 e 3;

d) calcule sua taxa média de variação para x variando de 1 a 2;

e) desenhe a reta secante ao seu gráfico, passando pelos pontos de abscissas 1 e 2;

f) determine o coeficiente da reta tangente ao seu gráfico no ponto (1,6).

05. Um objeto é largado do topo de um prédio de 50 metros de altura. A altura h (em metros) do objeto t segundos após o início da queda é dada por $h = 50 - 2t^2$.

a) Qual é a velocidade média do objeto considerando os 2 primeiros segundos de queda?

b) Qual sua velocidade em t =2 segundos?

06. Calcule o coeficiente angular da reta tangente à curva y = f(x) no ponto (a, b) para os seguintes casos:

a) f(x) = 3x + 1, a = −2 e b = −5;

b) f(x) = 2 sen(x), a = π/6 e b = 0,5;

c) f(x) = x3 − x2, a = 1 e b = 0;

d) $f(x)=\sqrt{x+3}$, a = 1 e b = 2;

07. A equação de queda livre na superfície terrestre é $d=\frac{9,8t^2}{2}$, em que d é a distância (em metros) percorrida pelo corpo em queda e t é o tempo (em segundos) de queda. Considere um objeto largado do alto de um penhasco de 100 m de altura. Determine sua velocidade no instante t = 5s.

08. A área do círculo de raio r é dada por $A = \pi r^2$. Qual é a taxa de variação da área A em relação ao raio r quando este é igual a 2 m?

09. Determine, quando existirem, as assíntotas dos gráficos das funções seguintes:

a) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \sec x$

c) $s(t) = 1 + \frac{1+x}{2+x}$

d) $V(p) = \frac{sen\, p}{p}$

e) $f(x) = \log x$

10. Verifique se f(x) é contínua em x = c:

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 3}$; c = −1

b) $f(x) = \frac{x}{x+2}$; c = 0

c) $f(x) = \log(2 + x)$; c =−2
d) $f(x) = \ln x^2$; c = 2
e) $f(x) = sen^2(\pi x)$; c =0

11. Determine para quais valores cada uma das funções seguintes são contínuas:

a) $f(x) = \log x$

b) $f(x) = \frac{2x+4}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{2x+4}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 6}$

2

Derivadas

2.1 Conceituação de Derivadas

No Capítulo 1, foram apresentados alguns exemplos de aplicações envolvendo funções em que pudemos determinar suas taxas de variação, tanto médias como instantâneas. Conhecer a taxa de variação instantânea de uma função, para os pontos que desejarmos, é algo extremamente importante na determinação de seu comportamento. Considere, por exemplo, uma função f(x) que relaciona a demanda f de um produto com seu preço x. Geralmente, aumentando o seu preço, observamos a queda da demanda. Mas, e se necessitarmos de mais detalhes de seu comportamento? Qual será sua taxa de variação (nesse caso, de decréscimo) para cada real ou centavo aumentado no preço, por exemplo? Será que essa taxa é constante, isto é, a variação da demanda é proporcional à variação do preço? Em muitos casos, não. Um aumento de 1 real no preço, por exemplo, quando o produto passa de 10 para 11 reais, pode afetar a demanda de forma diferente do que quando há um aumento de 20 para 21 reais.

Uma outra situação em que aplicamos o cálculo de taxas de variação é quando queremos determinar a velocidade de um móvel. Velocidade é a taxa de variação da posição do móvel em relação ao tempo, isto é, é a razão entre o deslocamento desse móvel e o intervalo de tempo que ele levou para realizar tal deslocamento. Se dispomos de uma função que relaciona a posição desse móvel em relação ao tempo, então, podemos, com relativa facilidade, determinar a sua velocidade média para o intervalo de tempo que desejarmos. E mais que isso, podemos também, determinar a velocidade desse móvel em qualquer instante, ou seja, sua velocidade instantânea em qualquer ponto de sua trajetória. Para isso, já utilizamos o conceito de limite e, neste capítulo, utilizaremos o de derivada, que é um tipo específico de limite. A vantagem, agora, é que serão apresentados novos procedimentos que tornarão os cálculos muito mais diretos e simples.

O conceito de derivada foi introduzido nos séculos XVII e XVIII através de problemas relacionados justamente ao estudo do movimento. Aos poucos, tais ideias foram sendo incorporadas por outras áreas do conhecimento. Para compreender melhor tal conceito é necessário o estudo dos limites de funções (como já fizemos no Capítulo 1). A derivada de uma função é, na verdade, o limite da taxa de variação média dessa função em relação à sua variável independente x. Mas o que isso significa? Para uma melhor compreensão do assunto, vamos iniciar esse estudo a partir de um exemplo que envolve exatamento o estudo do movimento de um objeto.

No capítulo anterior, no exemplo 1.6, estudamos alguns aspectos do movimento de uma partícula a partir da função que relaciona sua posição com o tempo de percurso. Você deve se lembrar do esforço para se determinar a velocidade dessa partícula no instante específico t =1s. Vamos retomar esse exemplo, mas, agora, objetivando a aplicação do conceito de derivada.

EXEMPLO 2.1

A partícula do exemplo 1.6 tem movimento que segue a função horária $s(t) = -t^2 + 6t$, com s em metros e t em segundos. Já calculamos a velocidade média dessa partícula para dois intervalos de tempo: de 1 a 3 e de 1 a 2 segundos. Em seguida, calculamos o limite da velocidade média com fazendo com que o intervalo de tempo Δt tendesse a zero, a partir do instante t =1s.

Vamos relembrar, através do gráfico da figura 2.1, como pudemos concluir que a velocidade no instante t =1s é igual à velocidade média num intervalo de tempo cada vez menor, ou seja, que diminui indefinidamente. Consideremos, inicialmente, o cálculo da velocidade média entre os instantes 1 e 3s. O resultado obtido foi igual ao coeficiente angular da reta que corta o gráfico nos pontos A e B1. Depois, diminuímos o intervalo: consideramos a variação de tempo de 1 a 2s. E o resultado obtido foi igual ao coeficiente angular da reta que intercepta o gráfico da função s(t) nos pontos A e B_2. Se continuarmos diminuindo dessa forma os intervalos considerados, cada vez mais nos aproximaremos do valor da velocidade da partícula no instante t =1s..

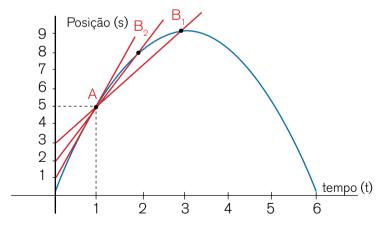



Figura 2.1

A velocidade no instante $t = 1s.$, foi obtida através do cálculo do limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

em que Δt é a variação do tempo (a partir de $t = 1s.$) e Δs é o deslocamento (variação da posição) nesse intervalo. O resultado obtido foi $v(1) = 4$ m/s.

Esse processo exigiu um procedimento algébrico não tão elementar. Isso só para determinar a velocidade da partícula nesse instante específico. Caso desejássemos determinar sua velocidade em outros instantes, teríamos que (a cada instante considerado) realizar todo o processo algébrico novamente.

No entanto, é possível determinar uma nova função, a partir da função original s(t), que fornece a variação instantânea da partícula em qualquer instante do percurso. Por enquanto, a obtenção dessa nova função será feita através do cálculo de limite, mas, na próxima seção, veremos algumas regras que facilitarão (e muito!) esse processo.

Vamos considerar um instante específico a em que queremos determinar a velocidade da partícula. A velocidade instantânea em a será obtida através do cálculo da velocidade média em um intervalo de tempo $h = t - a$, fazendo h tender a zero ($h \to 0$). A notação que estamos utilizando a partir de agora visa simplificar as expressões algébricas com as quais trabalharemos.

Da igualdade $h = t - a$, podemos obter

$$t = a + h \tag{2.1}$$

A posição do móvel no instante a é dada por

$$s(a) = -a^2 + 6a \tag{2.2}$$

Num instante genérico t, a posição do móvel será expressa considerando as fórmulas (2.1) e (2.2), da seguinte forma:

$$s(t) = s(a + h)$$
$$s(t) = s(a + h)^2 + 6(a + h)$$
$$s(t) = s(a^2 + 2ah + h^2) + 6a + 6h$$
$$s(t) = -a^2 - 2ah - h^2 + 6a + 6h \tag{2.3}$$

A velocidade no instante *a*, expressa por v (a), será obtida através do limite da taxa de variação da posição no intervalo de duração h, com h → 0, como apresentado a seguir:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t) - s(a)}{h} \qquad (2.4)$$

Substituindo as expressões (2.2) e (2.3) em (2.4), chegamos à expressão que fornece a velocidade no instante *a* (ou velocidade instantânea em *a*). Veja:

$$\begin{aligned}
v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{-a^2 - 2ah - h^2 + 6a + 6h - \left[-a^2 + 6a\right]}{h} \\
v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{-a^2 - 2ah - h^2 + 6a + 6h + a^2 - 6a}{h} \\
v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{-2ah - h^2 + 6h}{h} \\
v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{h(-2 - h + 6)}{h} \\
v(a) &= \lim_{h \to 0} (-2 - h + 6) \qquad (2.5) \\
v(a) &= -2a + 6
\end{aligned}$$

Os cálculos realizados no exemplo 1.6 são semelhantes ao que acabamos de ver. A diferença é que agora estamos considerando um instante ***a*** qualquer e não um valor conhecido, como fizemos no capítulo anterior. Na expressão em 2.5 podemos atribuir a ***a***, o valor que desejarmos. Desse forma, podemos reescrever tal expressão colocando t no lugar de ***a***, como a seguir:

$$v(t) = -2t + 6 \qquad (2.6)$$

Essa expressão é denominada ***derivada da função*** s(t).

Agora, podemos determinar a velocidade da partícula no instante que quisermos. Basta, para isso, substituir t na expressão (2.6) pelo valor desejado. Vamos, como exemplo, determinar a velocidade dessa partícula nos instantes t =1, t =2, t = 2,5, t =3 e t = 4s.

- $v(1) = 2 \cdot 1 + 6 = 4$ m/s;
- $v(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$ m/s
- $v(2{,}5) = -2 \cdot 2{,}5 + 6 = 1$ m/s

- $v(3) = -2 \cdot 3 + 6 = 0$;
- $v(4) = -2 \cdot 4 + 6 = -2$ m/s

Cada um dos valores obtidos acima é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva s(t) nos seus respectivos pontos. Compare os resultados obtidos com o comportamento do gráfico da função s(t) apresentado na figura 2.1. Dentre os valores considerados nos cálculos acima, as velocidades nos instantes t =1, t = 2 e t = 2,5s são todas positivas, o que significa que o deslocamento da partícula está ocorrendo no sentido positivo da trajetória. E perceba que a velocidade está diminuindo à medida que vai se aproximando do instante t = 3s. Neste instante, especificamente, a velocidade é nula (a partícula para). Já no instante t = 4s, a velocidade é negativa, o que indica que a partícula, agora, está no sentido contrário do início de sua trajetória. Quer dizer que no instante t = 3s há uma mudança de sentido. Repare, também, que nos instantes t =2 e t =4s, a partícula desenvolve a mesma velocidade, mas o deslocamento ocorre em sentidos contrários.

A definição formal de derivada pode ser feita de maneira semelhante ao processo que utilizamos no exemplo 2.1. Porém, vamos considerar uma função genérica f(x) e um ponto qualquer x de seu domínio.

Definição de Derivada

A derivada f'(x) da função f(x) é definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2.7)$$

sempre que esse limite existe.

Existem outras formas de simbolizar a derivada de uma função f(x), além de f '(x) (lê-se: “f linha”), tais como $D_x f$ ou Df/Dx. Essas notações são mais utilizadas quando trabalhamos com funções que são expressas a partir de mais que uma variável independente. Utilizaremos com mais frequência a notação f '(x) para designar a derivada de uma função f(x), ou, simplesmente, f '.

Diversas são as aplicações das derivadas. Ela pode ser utilizada, como no exemplo 2.1, para determinar taxas de variações instantâneas (como a

velocidade instantânea), para obter máximos e mínimos de funções, para detalhar o comportamento de funções, e muito mais. No capítulo 3, veremos algumas das principais aplicações da derivada. Mas, antes, veremos algumas regras, denominadas ***regras de derivação***, que facilitarão a obtenção da derivada de uma função. A utilização dessas regras nos permitirá obter a derivada sem ter que calcular nenhum tipo de função. É o que veremos na próxima seção.

2.2 Regras básicas de derivação

A derivada de uma função f(x) é definida como o limite da taxa de variação de f em relação a x para intervalos infinitesimalmente pequenos de x. Obter a derivada através do cálculo de limites nem sempre é tarefa fácil. Dependendo da expressão que define tal função, o cálculo desse tipo de limite pode se transformar em uma tarefa árdua e penosa. No entanto, nesta seção, veremos como obter derivadas de funções de diversos tipos sem ter que calcular limites. O processo de obtenção das derivadas será realizado através da aplicações de algumas regras (fórmulas).

Não nos preocuparemos em demonstrar como tais regras foram obtidas, pois, isso demandaria muito tempo e desviaria nosso foco que é o de fazer com que você compreenda o que é uma derivada, para que serve, como e quando utilizá-la. Apenas um exemplo inicial com uma função polinomial será apresentado para dar uma ideia de como tais regras são válidas.

EXEMPLO 2.2

Considere a função $f(x) = x^2 + 5x + 3$. Vamos obter sua derivada, utilizando a definção (2.7):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como $f(x) = x^2 + 5x + 3$, podemos escrever:

$$f(x + h) = (x + h)^2 - 5(x + h) + 3 = x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h + 3$$

Daí, substituindo a expressão obtida para f(x + h) no limite que define a derivada f '(x), temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 5x + 5h + 3 - (x^2 - 5x + 3)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 5x + 5h + 3 - x^2 + 5x - 3}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 5h}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h - 5)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h - 5)$$
$$f'(x) = 2x - 5$$

Comparando a função original f(x) com a sua derivada f '(x), note que no lugar do termo "x^2" de f(x), aparece o termo "2x " em sua derivada. No processo de derivação, o número que aparecia como expoente da variável "x", agora multiplica esse termo. E em seu lugar, no expoente, o valor agora é igual a 1 (uma unidade a menos que antes). Isso sempre vai acontecer com expressões da forma "x^n": suas derivadas serão dadas por "nx^{n-1}".

Além disso, a derivação do termo "–5x" resultou em "–5". Sempre que a variável "x" (elevada a 1) estiver sendo multiplicada por uma constante qualquer, sua derivada será igual a essa constante (não aparece mais a variável x). De forma geral, a derivada de "cx", em que c é uma constante, é igual a "c".

E o que aconteceu com a constante "3" da função f(x)? Ela simplesmente não aparece na derivada f '(x). É que a derivada de uma constante é sempre igual a zero. Se a derivada indica a taxa de variação, então quando não há variação (pois estamos nos referindo a um valor constante), a taxa de variação é nula, isto é, a derivada é igual a zero.

Vamos, então, conhecer as regras que nos permitirão derivar diversos tipos de funções.

Regra 1: Derivada da Função y = k

Seja uma função do tipo y = k, em que k é uma constante, então a sua derivada é:

$$y' = 0$$

Como a derivada de uma função representa a sua taxa de variação, então, se a função não varia (é constante), sua derivada deve ser igual a zero.

EXEMPLO 2.3

As derivadas das funções seguintes são todas iguais a zero, pois todas elas são constantes:

d) $f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = o$;
e) $y = -0{,}02 \Rightarrow y' = 0$;
f) $s(t) = 1/100 \Rightarrow s'(t) = 0$;
g) $f(x) = t^3 \Rightarrow f'(x) = o$

Note que no item (d), a função f indica que a variável independente é x e não t. Portanto, o termo t^3 é considerado constante. Por esse motivo a derivada de f(x) é igual a zero.

Regra 2: Derivada da Função $y = x^n$
Seja uma função do tipo $y = x^n$, então a sua derivada é:

$$y' = n \cdot x^{n-1},\ n \in \mathbb{R}$$

A função derivada y' acima não pode ser calculada quando se tem x = 0 e n = 0.
Outras formas de representar a regra 2 são:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$
$$D_x(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

EXEMPLO 2.4

Vamos determinar a derivada de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x) = x^4$
Tomando n = 4, na regra 1, temos:

$$f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} \Rightarrow f'(x) = 4x^3.$$

b) $f(x) = x^1$

Nesse caso, consideramos n = 1. Daí, temos:

$$f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} \Rightarrow f'(x) = x^0 \Rightarrow f'(x) = 1$$

c) $g(x) = \frac{1}{x^4}$

A expressão $\frac{1}{x^4}$ não tem, aparentemente, a forma x^n, mas podemos escrevê-la como x^{-4}. Daí, portanto, sua derivada será dada por:

$$g'(x) = -4 \cdot x^{-4-1} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-5}$$

Esse resultado também pode ser escrito na forma:

$$g'(x) = \frac{-4}{x^5}$$

d) $h(x) = \sqrt[6]{x^5}$

Antes de realizarmos a derivação, vamos utilizar uma das propriedades das potências e reescrever a função na forma:

$$h(x) = x^{\frac{5}{6}}$$

Assim, a sua derivada será dada por:

$$h(x) = \frac{5}{6} \cdot x^{\frac{5}{6}-1} \Rightarrow h(x) = \frac{5}{6} \cdot x^{\frac{5}{6}-\frac{6}{6}} \Rightarrow h(x) = \frac{5x^{-\frac{1}{6}}}{6}$$

Esse resultado também pode ser escrito na forma:

$$h(x) = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$$

CONEXÃO

No link: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/11411, você encontrará um interessante aplicativo (disponível gratuitamente para *download*), denominado "*función derivada*" que

mostra o conceito de taxa de variação média e sua interpretação geométrica, de taxa de variação instantânea, a função derivada e a derivada de função composta. Também apresenta exemplos e exercícios que poderão auxiliar sua aprendizagem. O texto é apresentado em espanhol.

Regra 3: Derivada da Função y = f(x) ± g(x)

Seja uma função do tipo y = f(x) ± g(x), então a sua derivada é:

$$y' = f'(x) \pm g'(x)$$

A regra 3 nos indica que a derivada de uma soma ou subtração de funções é igual à soma ou subtração, respectivamente, de suas derivadas. Isso nos permite, numa função em que os termos aparecem na forma de adição e/ou subtração, derivar cada termo separadamente.

EXEMPLO 2.5

Vamos derivar as funções seguintes:

a) $y = \frac{1}{x} + x^2$

A função y é obtida a partir da soma dos termos $\frac{1}{x}$ e x^2. Portanto, pela regra 3, sua derivada y' é indica pela soma das derivadas desses dois termos:

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(x^2\right)'$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} + 2x$$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 7$

Como a função f(x) é expressa por uma soma algébrica, então, para determinar sua derivada, podemos derivar separadamente cada um dos termos que a constituem. Nesse exemplo, utilizaremos também as regras 1 e 2 para derivar o termo constante 7 e o termo da forma x^n, respectivamente. Veja:

$$f'(x) = (x^3)' + (x^2)' - (x)' + (7)'$$

$$f'(x) = 3x^{3-1} + 2x^{2-1} - 1x^{1-1} + 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Regra 4: Derivada da Função y = k · f(x)

Seja uma função do tipo y = k · f(x, em que k é uma constante, então a sua derivada é:

$$y' = k \cdot f'(x)$$

EXEMPLO 2.6

Vamos determinar as derivadas das funções seguintes aplicando as regras adequadas.

a) $f'(x) = 5x^3$

Aplicando as regras 1 e 4, temos:

$$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} \Rightarrow f'(x) = 15x^2$$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 5}{7}$

Essa função pode ser também escrita na forma:

$$f(x) = \frac{1}{7}\left(2x^3 - x^2 + 5\right)$$

Dessa forma, é possível aplicar a regra 4 (além de outras) para derivá-la.

$$f'(x) = \frac{1}{7}\left(2x^3 - x^2 + 5\right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{7}\left(2 \cdot 3x^{3-1} - 2x^{2-1} + 0\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{7}\left(6x^2 - 2x\right)$$

Esse resultado também pode ser escrito na forma:

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 2x}{7}$$

É possível deduzir que, quando a função é constituída por uma fração cujo denominador é uma constante, podemos derivá-la apenas determinando a derivada do numerador e mantendo o denominador.

Quando uma função é representada por uma constante k multiplicada por outra função ou por outra função dividada pela constante, então, para derivá-la, precisamos apenas trabalhar com a parte funcional (parte que apresenta a variável independente x), mantendo a constante da forma como se apresenta na função original, antes de começar o processo de derivação.

Regra 5: Derivada da Função $y = f(x) \cdot g(x)$

Seja uma função do tipo $y = f(x) \cdot g(x)$. Então a sua derivada é:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f'(x)$$

EXEMPLO 2.7

Vamos calcular a derivadas das funções seguintes que têm a forma de produto de funções. Utilizaremos, num primeiro passo, a regra 5. Em seguida, utilizaremos as regras que forem necessárias para finalizar o processo de derivação.

a) $y = (x^2 - 5x)(3x + 1)$

Note que a função y pode ser escrita na forma $y = f(x) \cdot g(x)$, em que $f(x) = x^2 - 5x$ e $g(x) = 3x + 1$. Dessa forma, para determinarmos a derivada y', precisamos obter f'(x) e g'(x) e, daí, utilizar a regra 5.

Considere as derivadas:

$$f'(x) = 2x - 5$$
$$g'(x) = 3$$

Utilizando a regra 5, temos:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f'(x)$$
$$y' = (2x - 5) \cdot (3x + 1) + 3 \cdot (2x - 5)$$

A expressão acima já apresenta a derivada da função y, mas podemos simplificar a expressão que a define aplicando a propriedade distributiva nos dois produtos e agrupando os termos semelhantes. Veja:

$$y' = (2x - 5) \cdot (3x + 1) + 3 \cdot (2x - 5)$$
$$y' = 6x^2 + 2x - 15x - \cdot 5 + 6x - 15$$
$$y' = 6x^2 - 7x - \cdot 20$$

Diversas funções, que são escritas na forma de produto de duas outras funções, podem ser derivadas, como vimos, utilizando a regra 5, mas há como derivá-las de outra forma (sem utilizar essa regra). Basta, para isso, desenvolver algebricamente a expressão que define a função e escrevê-la na forma apenas de uma soma algébrica. Veja, no item (b) do exemplo 2.7, as duas formas de derivação (utilizando ou não a regra 5).

b) $h(x) = (x^3 + 1)(x^2 - x)$

Primeiro, vamos derivar a função h(x) utilizando a regra 5. Para isso, tomemos $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x^2 - x$. Suas derivadas são, respectivamente, $f'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = 2x - 2$. Portanto, derivando e simplificando a expressão resultante, temos:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f'(x)$$
$$h'(x) = 3x^2 \cdot (x^2 - x) + (2x - 1) \cdot (x^3 + 1)$$
$$h'(x) = 3x^4 - 3x^3 + 2x^4 + 2x - x^3 - 1$$
$$h'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 2x - 1$$

Se, antes de aplicarmos as regras de derivação, nós desenvolvermos algebricamente a expressão que define h(x), será possível a obtenção da sua derivada sem a aplicação da regra 5.

Aplicando a propriedade distributiva, podemos escrever h(x) da seguinte forma:

$$h(x) = x^5 - x^4 + x^2 - x$$

Dessa forma, através da aplicação das regras 2, 3 e 4, podemos determinar sua derivada, que é:

$$h'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 2x - 1$$

CONEXÃO

No endereço http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/6091, você irá encontrar um interessante aplicativo que apresenta a aplicação da “regra do produto” (*the product rule*) para a obtenção de derivadas de alguns exemplos específicos de funções. Você mesmo insere a função produto que deseja derivar (a partir de algumas funções já predefinidas) e o programa fornece o resultado da derivada, bem como apresenta uma representação gráfica da função produto e de sua derivada. Para poder utilizá-lo será necessário o *plug in Mathematica Player* que está disponível para *download* na mesma página.

Regra 6: Derivada da Função $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Seja uma função do tipo $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, em que $g(x) \neq 0$, então a sua derivada é:

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) - f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

EXEMPLO 2.8

Neste exemplo, veremos como aplicar a regra 6 (além das demais que serão também necessárias) para derivar funções que são escritas na forma de quociente.

a) $t'(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x + 1}$

A expressão "$x^2 - 3x$", que está no numerador da fração, será denotada por f(x), enquanto a expressão"2x + 1" do denominador denotaremos por g(x). Sendo assim, suas derivadas são, respectivamente:

$$f'(x) = 2x - 3$$
$$g'(x) = 2$$

Dessa forma, a derivada t'(x) poderá ser obtida como mostrado a seguir.

$$t'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) - f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

$$t'(x) = \frac{(2x-3) \cdot (2x+1) - 2(x^2 - 3x)}{(2x+1)^2}$$

Simplificando a expressão, temos:

$$t'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 3}{(2x+1)^2}$$

b) $f(x) = \dfrac{7}{-x^3 + 2x - 4}$

Neste item, queremos derivar a função indicada por f(x), que é a mesma representação da expressão que compõe o numerador da função cuja derivada é dada pela regra 6. Isso não é problema, pois podemos representar essa regra utilizando outras letras (símbolos). Aqui, para evitar algum tipo de confusão com a notação, vamos considerar a regra 6 escrita da seguinte forma:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

em que a função y é dada por

$$y = \frac{u}{v}$$

Vamos, então, considerar para a função f(x),

$$u = 7$$

e

$$v = -x^3 + 2x - 4$$

As derivadas de u e v são, respectivamente:

$$u' = 7$$

e

$$v' = -3x^2 + 2$$

A derivada f'(x) poderá, portanto, ser calculada da seguinte forma, a partir da aplicação da regra 6:

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (-x^3 + 2x - 4) - (-3x^2 + 2) \cdot 7}{(-x^3 + 2x - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-7(-3x^2 + 2)}{(-x^3 + 2x - 4)^2}$$

CONEXÃO

No endereço http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/6090, você irá encontrar um interessante aplicativo que apresenta a aplicação da “regra do quociente” (“the quotiente rule”) para a obtenção de derivadas de alguns exemplos específicos de funções. Você mesmo insere a função quociente que deseja derivar (a partir de algumas funções já predefinidas) e o programa fornece o resultado da derivada, bem como apresenta uma representação gráfica da função quociente e de sua derivada. Para poder utilizá-lo será necessário o *plug in* “Mathematica Player” que está disponível para *download* na mesma página.

2.3 Derivadas de Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas ***seno*** (sen), ***cosseno*** (cos), ***tangente*** (tg), ***cossecante*** (csc), ***secante*** (sec) e ***cotangente*** (cotg) terão suas derivadas apresentadas nesta seção. As últimas quatro funções podem ser todas escritas a partir das duas primeiras, como mostrado a seguir:

- $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$
- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
- $\csc x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$
- $\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x}$

Sendo assim, podemos também determinar as derivadas das funções tangente, cossecante, secante e cotangente a partir das derivadas do seno e do cosseno, aplicando a regra 6 de derivação (regra do quociente).

No entanto, vamos, primeiro, apresentar (e demonstrar) as regras das derivadas do seno e do cosseno.

Derivada do seno

A derivada da função $y = \text{sen } x$ é dada por

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x$$

Podemos demonstrar a regra da derivada do seno aplicando, inicialmente a definição através de limite. Para a função $y = \text{sen } x$, temos a derivada dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } (x+h) - \text{sen } x}{h}$$

Como $\text{sen } (x+h) = \text{sen } x \cdot \cos h + \cos x \cdot \text{sen } h$, então podemos continuar o cálculo da derivada acima como se segue:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{(\text{sen } x \cdot \cos h + \cos x \cdot \text{sen } h) - \text{sen } x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \cdot (-1 + \cos h) + \cos x \cdot \text{sen } h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \cdot (-1 + \cos h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \text{sen } h}{h}
\end{aligned}$$

Como nos limites acima o incremento (valor que tende a zero) é a variável h, então podemos reescrevê-los da forma como apresentada a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \text{sen } x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(-1 + \cos h)}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h} \\
&= \text{sen } x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Derivada do cosseno

A derivada da função $y = \cos x$ é dada por

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

Vamos, também, demonstrar a regra da derivada do cosseno aplicando a definição através de limite. Para a função $y = \cos x$, temos a derivada dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Como $\cos(x+h) = \cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h$, então podemos continuar o cálculo da derivada acima como se segue:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot (-1 + \cos h) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot (-1 + \cos h)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} h}{h}
\end{aligned}$$

Aqui, da mesma forma que na demonstração da regra da derivada do seno, o incremento é a variável h, então podemos reescrevê-los da forma como apresentada a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(-1 + \cos h)}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 \\
&= -\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

As derivadas das demais funções trigonométricas podem ser obtidas a partir de uma dessas duas regras, ou das duas, e da regra da derivada de um quociente. Vamos apresentar apenas a dedução da regra da derivada da função tangente e as demais deverão ficar como exercício.

Como a tangente de um ângulo é a razão entre o seno e o cosseno desse ângulo, então sua derivada pode ser obtida aplicando-se a regra da derivada do quociente (regra 6 de derivação) em tal razão. Veja a seguir:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\text{tg } x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)\\ &= \frac{\frac{d}{dx}(\text{sen } x)\cdot\cos x - \frac{d}{dx}(\cos x)\cdot\text{sen } x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x\cdot\cos x - (-\text{ sen } x)\cdot\text{sen } x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= \sec^2 x\end{aligned}$$

Podemos, então, escrever a regra da derivada da função tangente como a seguir:

Derivada da tangente

A derivada da função $y = \text{tg } x$ é dada por

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x$$

As derivadas das demais funções trigonométricas são apresentadas a seguir:

Derivada da cossecante

A derivada da função $y = \csc x$ é dada por

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cdot\text{ cotg } x$$

Derivada da secante

A derivada da função $y = \sec x$ é dada por

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$$

Derivada da secante

A derivada da função $y = \operatorname{cotg} x$ é dada por

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\csc^2 x$$

Vamos, agora, ver um exemplo de aplicação de algumas dessas regras.

EXEMPLO 2.9

Veremos, neste exemplo, como derivar funções cujas expressões contêm funções trigonométricas. No seu desenvolvimento, utilizaremos diferentes notações para indicar as derivadas, no intuito de familiarizar você, leitor, com todas elas. As funções que serão derivadas são:

a) $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

c) $f(x) = x^3 \cdot \sec x$

d) $g(x) = t \cos x - 3\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} t$

A seguir são apresentados os cálculos de suas derivadas.

a) A função $y = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ está escrita na forma de um produto. Então podemos derivá-la utilizando a regra 5 (derivada do produto).

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot \operatorname{sen} x \\ &= \cos x \cdot \cos x + (-\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x \\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

b) No caso da função $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$, utilizaremos a regra 6 (derivada do quociente).

$$\begin{aligned}D_x f &= D_x\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right)\\ &= D_x(\text{sen}\,x)\cdot x - D_x x\cdot \text{sen}\,x\\ &= (\cos x)\cdot x - 1\cdot \text{sen}\,x\\ &= x\cos x - \text{sen}\,x\end{aligned}$$

c) A função $f(x)=x^3\cdot\sec x$ também tem a forma de produto. Por isso, para derivá-la, utilizaremos a regra 5 (regra do produto) como apresentado a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{d(x^3)}{dx}\cdot\sec x+\frac{d(\sec x)}{dx}\cdot x^3\\ &= 3x^2\cdot\sec x+\sec x\cdot \text{tg}\,x\cdot x^3\\ &= x^2\sec x(3+x\ \text{tg}\,x)\end{aligned}$$

d) Para derivar a função $g(x)=t\cos x-3\text{sen}\,x+\text{tg}\,t$, que é formada por uma soma algébrica de termos que contém funções trigonométricas, podemos realizar a derivação termo a termo. Note que a função g é expressa em função da variável x. Portanto, o termo t é considerado uma constante. Isso nos leva a concluir que a derivada da expressão "tg x" é igual a zero. Sendo assim, utilizaremos algumas das regras elementares de derivação e as derivadas das funções trigonométricas que compõem a função g(x). O desenvolvimento do processo de derivação é mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}g'(x) &= (t\cos x)' - (3\text{sen}\,x)' + (\text{tg}\,t)'\\ &= t(-\text{sen}\,x)-3\cos x+0\\ &= -t\ \text{sen}\,x-3\cos x\end{aligned}$$

2.4 Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

Quando dizemos que $y=\text{sen}\,x$, estamos relacionando os valores de y que variam no intervalo [−1,1] a valores de x que correspondem às medidas dos arcos de uma circunferência. Por exemplo, se considerarmos os valores de x que variam no intervalo [− π/2, π/2], que é o domínio desta função, então a imagem

será o intervalo [−1, 1]. Na verdade, o domínio desta função admite qualquer valor real para x. Apenas estamos restringindo o intervalo para podermos definir a inversa dessa função. Se considerarmos o domínio como todo o conjunto real, sua inversa não poderá ser definida como função. Mas isso não é o mais importante nesse momento.

Então, vamos considerar a função $y = \text{sen}\, x$, para $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ e $-1 \leq y \leq 1$. Para determinarmos o valor de y para um certo valor de x, devemos calcular o seno do arco de medida x. Por exemplo, o seno do arco de medida $x = \pi/4$ é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Na figura 2.2, vemos a representação gráfica dessa função, com o ponto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ em destaque.

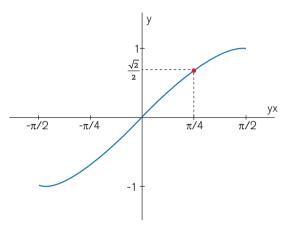



Figura 2.2

Para determinarmos a inversa desta função, devemos relacionar os valores y que representam medidas dos arcos de circunferência do intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ com valores de x no intervalo $[-1,1]$. Os valores de x são os senos dos valores de y. Quer dizer, então, que, agora, os valores de y desta última função são os valores de x da função anterior, e vice-versa. Podemos escrever:

$$x = \text{sen}\, y$$

Se quisermos isolar y, podemos escrever:

$$y = \text{arc sen}\, x = \text{sen}^{-2} x$$

A sua representação gráfica é apresentada na figura 2.3. Há um destaque para o ponto de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Este ponto indica que um ângulo cujo seno é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é aquele de medida $\frac{\neq}{4}$ radiano.

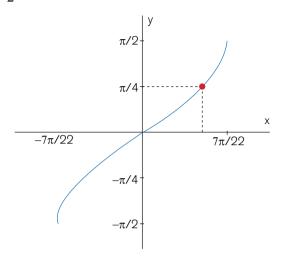



Figura 2.3

Da mesma forma, as funções ***cosseno***, ***tangente***, ***cossecante***, ***secante*** e ***cotangente*** têm suas funções inversas que são, respectivamente, as funções ***arco cosseno*** (arc cos), ***arco tangente*** (arc tg), ***arco cossecante*** (arc csc), ***arco secante*** (arc sec) e ***arco cotangente*** (arc cotg).

EXEMPLO 2.10

Vamos demonstrar a identidade

$$\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2}$$

Para x > 0.

Podemos denotar por y o arc sen x e por z o arc cos x. Sendo assim, temos:

$$y = \text{arc sen } x \Rightarrow x = \text{sen } y$$

e

$$z = \text{arc cos } x \Rightarrow x = \cos z$$

Portanto, podemos concluir que:

$$\text{sen}\, y = \cos z$$

Para x > 0, a igualdade acima é válida quando a soma das medidas dos arcos y e z é igual a $\frac{\neq}{2}$ (propriedade de ângulos complementares). Dessa forma, como $y = \text{arc sen}\, x$ e $z = \text{arc cos}\, x$, então, concluímos que:

$$\text{arc sen}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2}$$

É possível determinar as derivadas das funções trigonométricas inversas a partir das derivadas das funções trigonométricas, mas, para isso, necessitamos da aplicação de uma regra, denominada Regra da Cadeia, que será apresentada na seção 2.7. Portanto, deixaremos algumas dessas demonstrações como exercício (veja o exercício 1 deste capítulo) na seção 2.7. A demonstração da fórmula da derivada da função arco seno será apresentada como exemplo. A seguir elas serão apenas apresentadas e aplicadas em alguns exemplos.

Derivadas das funções trigonométricas inversas

Nas regras de derivação a seguir, considere $-1 \leq x \leq 1$.

- $\frac{d}{dx}(\text{arc sen}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arc cos}\, x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arc tg}\, x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arc csc}\, x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arc sec}\, x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{cotg}\, x) = \frac{-1}{1+x^2}$

Note que os pares de funções arco seno/arco cosseno

EXEMPLO 2.11

Obtenha a taxa de variação da função $y = \text{arc } \cos(x)$ quando $x = \frac{1}{2}$.

Para determinar a taxa de variação de uma função em um ponto, devemos calcular a sua derivada nesse ponto. A derivada da função $y = \text{arc } \cos(x)$ é:

$$\frac{d}{dx}(\text{arc } \cos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Considerando $x = \frac{1}{2}$, o valor dessa derivada é:

$$\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{-\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} = -\frac{4\sqrt{\frac{3}{4}}}{3}$$

Portanto a taxa de variação dessa função no ponto em que $x = \frac{1}{2}$ é $-\frac{4\sqrt{\frac{3}{4}}}{3}$

(aproximadamente – 0,1547). Essa função é decrescente nesse ponto e em todos os pontos no intervalo em que definimos a função arco cosseno ([–1,1]).

EXEMPLO 2.12

Determine a derivada da função $y = x^2 \cdot \text{arc sec } x$.

Nesse caso, a função y é uma função produto. Portanto, para derivá-la, vamos utilizar, inicialmente, a regra 5 (derivada do produto). Em seguida derivaremos os termos simples utilizando as regras elementares.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} \cdot \text{arc sec } x + \frac{d(\text{arc sec } x)}{dx} \cdot x^2 = 2x \cdot \text{arc sec } x + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^2$$

$$= \frac{2x \cdot \text{arc sec } x \cdot \sqrt{1-x^2} - x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\left(2\text{arc sec } x \cdot \sqrt{1-x^2} - x\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.5 Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas

As funções exponenciais têm larga aplicação em modelos de crescimento. Você certamente já ouviu falar em crescimento exponencial em aplicações que envolvem, por exemplo, cálculos de juros compostos, de crescimento populacional, de desvalorização de certas utilidades, entre tantas outras.

Elas geralmente têm o formato

$$f(x) = a^x \quad \text{ou} \quad f(x) = e^x$$

em que a pode ser qualquer constante real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$ e o número e também é uma constante real definida como

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cong 2{,}71828$$

O número e tem diversas aplicações nas ciências naturais além de uma particularidade interessante: a derivada da expressão e^x é ela mesma. Isso traz algumas consequências interessantes nos cálculos das integrais (que começaremos a ver no capítulo 4).

Outras formas de função exponencial que, também, ocorre com frequência nas aplicações são aquelas em que o expoente aparece multiplicado por uma constante ou uma constante é somada à potência. Mas os comportamentos são semelhantes aos dos formatos apresentados acima.

Se a base ***a*** for um valor entre 0 e 1, então a função é decrescente em todo o intervalo real. Caso contrário, se a base for um valor maior que 1, a função é sempre crescente. As figuras 2.4 e 2.5 apresentam dois exemplos de funções exponenciais. Elas são, respectivamente,

$$f(x) = 2^x \quad \text{e} \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

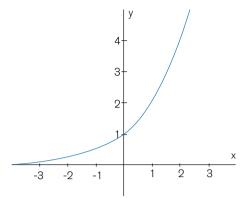



Figura 2.4

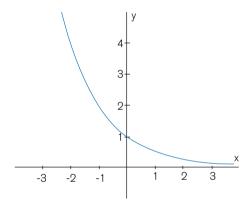



Figura 2.5

As funções inversas das funções $f(x) = a^x$ e $f(x) = e^x$ são, respectivamente, as funções

$$f(x) = \log_a x \quad e \quad f(x) = \text{In}x$$

em que a é qualquer constante real positiva e diferente de 1 (um) e o domínio de ambas é o conjunto dos números reais positivos ($x > 0$).

A segunda função, $f(x) = \text{In}x$, é denominada definida pelo logaritmo natural (ln) que é um logaritmo cuja base é o número e, isto é,

$$\text{In}x = \log_e x$$

Além de diversas aplicações diretas, as funções logarítmicas também são muito úteis na resolução de equações em que a incógnita é expoente de uma potência. Para escrever uma função exponencial na forma linear, utilizamos os logaritmos.

A seguir, você verá as regras de derivação para essas quatro funções.

Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas

Nas regras de derivação a seguir, considere a > 0 e a ≠ 1, x > 0 para as funções exponenciais.

- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
- $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

EXEMPLO 2.13

Calcule as derivadas das funções seguintes:

a) $f(x) = 10^x \cdot (1 + 3 \cdot \log x)$

b) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

c) $h(x) = xe^x$

A determinação dessas derivadas dessas funções passa pela aplicação das regras 5 e/ou 6 (derivada do produto e derivada do quociente), além de outras como as regras desta seção.

a) A derivada da função $f(x) = 10^x \cdot (1 + 3 \cdot \log x)$ pode ser obtida pela aplicação, inicialmente da regra 5 (regra do produto) e, depois, das regras elementares além das regras das funções exponenciais e logarítmicas, como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (10^x)' \cdot (1 + 3 \cdot \log x) + (1 + 3 \cdot \log x)' \cdot 10^x \\ &= 10^x \cdot \ln 10 \cdot (1 + 3 \cdot \log x) + \left(0 + 3 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}\right) \cdot 10^x \\ &= 10^x \cdot \ln 10 + 3 \cdot 10^x \cdot \ln 10 \cdot \log x + \frac{10^x \cdot 3}{x \cdot \ln 10} \\ &= 10^x \cdot \left(\ln 10 + 3 \cdot \ln 10 \cdot \log x + \frac{3}{x \cdot \ln 10}\right) \end{aligned}$$

b) No caso da função $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, é necessário, para começar o processo de derivação, aplicar a regra 6 (regra do quociente). Em seguida, aplicaremos a regra da derivada do "ln" e a regra 2.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \\ &= \frac{(\ln x)' \cdot x - (x)' \cdot \ln x}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.14

Um pesquisador, realizando estudo sobre o crescimento de uma população de insetos, observou que a sua quantidade inicial de insetos era de, aproximadamente, 10.000. Anotando, dia após dia, a quantidade de insetos dessa população, observou que ela crescia sempre 5% em relação ao dia anterior.

a) Denotando por f(x) a quantidade de insetos x dias após o início do estudo, qual é a expressão que relaciona corretamente x e f(x)?

b) Quais são as taxas de crescimento dessa população após 3, 10 e 20 dias após o início da pesquisa?

Para determinarmos a expressão que relaciona y e x, vamos, primeiro, considerar que, para se calcular a população em um determinado dia, podemos multiplicar a quantidade do dia anterior por 1,05 (que significa 105%). Para o primeiro dia após o início do estudo, a quantidade pode ser expressa por $10.000 \cdot 1{,}05$. No segundo dia, a quantidade será expressa por $10.000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05$, que pode ser escrita na forma exponencial $10.000 \cdot 1{,}05^2$. Já não é difícil perceber que para o terceiro dia, a expressão terá a forma $10.000 \cdot 1{,}05^3$ e, de forma geral, para x dias após o início da pesquisa, a quantidade total de insetos será

$$y = 10.000 \cdot 1{,}05^x$$

Como já temos a função que relaciona y com x, para calcularmos as taxas de crescimento dessa população após 3, 10 e 20 dias (como também para qualquer outro valor de x), vamos determinar o valor da derivada da função y para esses valores de x. A seguir, são apresentados tais cálculos e as conclusões.

$$y' = (10.000 \cdot 1{,}05^x)'$$
$$y' = 10.000 \cdot (1{,}05^x)'$$
$$y' = 10.000 \cdot 1{,}05^x \cdot \ln(1{,}05)$$

Como o valor aproximado do ln (1,05) é 0,04879, então podemos escrever a derivada da função y como:

$$y' = 487{,}9 \cdot 1{,}05^x$$

Sendo assim, os valores de y' para x igual a 3, 5 e 20 são, respectiva e aproximadamente,

- $y'(3) = 487{,}9 \cdot 1{,}05^3 = 564{,}8$ insetos/dia;

- $y'(10) = 487{,}9 \cdot 1{,}05^{10} = 794{,}7$ insetos/dia;

- $y'(20) = 487{,}9 \cdot 1{,}05^{20} = 1{,}294{,}5$ insetos/dia;

Note que, à medida que o valor de x aumenta, a taxa de variação (nesse caso, a taxa de crescimento) de y aumenta cada vez mais. Isso é uma característica das variáveis que apresentam comportamento exponencial.

A figura 2.6 apresenta o gráfico da função y com destaque aos pontos de abscissas 3, 10 e 20. Nela, também, são representadas as retas tangentes à curva nos pontos em destaque para ajudar a ilustrar a taxa de variação da função y.

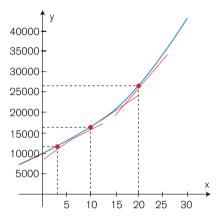



Figura 2.6

2.6 Derivadas de ordem superior

Já abordamos situações em que a função v(t) que fornece a velocidade de um móvel, no instante t, foi obtida a partir da sua função posição s(t), através da derivação desta última função, isto é, a função velocidade v(t) de um móvel é a derivada s'(t) da sua função posição s(t). Isso justifica-se pelo fato da velocidade do móvel indicar a taxa de variação da sua posição, em relação ao tempo t. E a derivada de uma função indica exatamente a taxa de variação de tal função.

De forma semelhante, a aceleração de um móvel indica a variação de sua velocidade. Então, podemos deduzir que a função a(t) que fornece a velocidade de um móvel, no instante t, é a derivada v'(t) de sua velocidade.

Denotando por s(t) a função posição, v(t) a função velocidade e por a(t) a função aceleração de um móvel, todas em relação ao tempo t, então podemos escrever:

$$v(t) = s'(t)$$

e

$$a(t) = v'(t)$$

Sendo assim, é correto concluir que

$$a(t) = s'(t)$$

isto é, a função aceleração corresponde à ***derivada segunda*** ou ***derivada de segunda ordem*** da função posição s(t).

Além de aplicações semelhantes a essa, as derivadas de ordem superior são utilizadas em alguns processos algébricos muito úteis, como, por exemplo, na determinação de máximos e mínimos de funções, que veremos no capítulo 4.

De forma geral, dada uma função y = f(x), as suas derivadas de ordens superiores podem ser representadas como a seguir:

derivada de segunda ordem: y'', $f''(x)$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$

derivada de terceira ordem: y''', $f'''(x)$ ou $\frac{d^3y}{dx^3}$

derivada de quarta ordem: $y^{(4)}$, $f^{(4)}(x)$ ou $\frac{d^4y}{dx^4}$

derivada de n-ésima ordem: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ ou $\frac{d^ny}{dx^n}$

EXEMPLO 2.15

Uma partícula desloca-se segundo a função horária $s(t) = 3x - 2x^2 + \frac{x^3}{2}$, s em metros e t em segundos, com $0 \leq t \leq 3$. O gráfico da função s(t) é apresentado na figura 2.7. Se destacarmos o ponto em que t = 2, vemos que a reta tangente à curva nesse ponto tem inclinação positiva, o que indica que, nesse ponto, a velocidade da partícula é positiva (ela desloca-se no sentido positivo de sua trajetória). Observando a vizinhança desse ponto é possível perceber que a velocidade da partícula está aumentando.

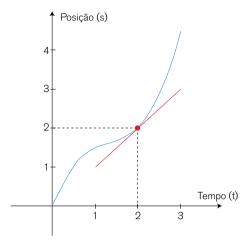



Figura 2.7

Podemos verificar se realmente está ocorrendo aumento da velocidade através do cálculo da derivada da função velocidade da partícula. Se o valor dessa derivada for positivo nesse ponto, podemos concluir que aí sua velocidade é positiva. Se a derivada for negativa, a velocidade está diminuindo. E se for igual a zero, a partícula encontra-se parada. A derivada da função velocidade, que é a derivada segunda da função posição, consiste na função aceleração, que nos fornece informações sobre a variação da velocidade. Na figura 2.8, você pode observar o gráfico da função v(t) ou s'(t) .

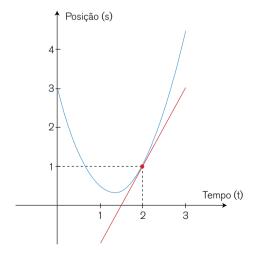



Figura 2.8

Note que a reta tangente (cujo coeficiente angular é a derivada da função velocidade v(t) no ponto em que t = 2) é crescente. Isso indica que, nesse ponto, a velocidade está aumentando.

Na figura 2.9, temos a representação gráfica da função a(t) que é igual a v'(t) ou a s'(t) .

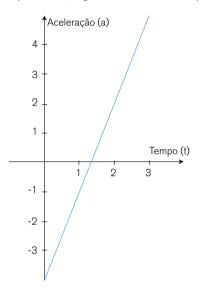



Figura 2.9

Na figura 2.10 é possível comparar o comportamento da função posição s(t), no intervalo considerado, bem como de sua derivada primeira, que é a função velocidade v(t) e de sua derivada segunda, que é a função aceleração a(t). É possível perceber que a função aceleração assume valores negativos para $x < \frac{4}{3}$ e positivos para $x > \frac{4}{3}$. Comparando com o comportamento da função velocidade nesse ponto, podemos perceber que é o exato momento em que ela deixa de ser crescente para ser crescente. E ainda, é possível perceber que nesse instante, a função posição tem mudança de concavidade, o que indica que até esse momento a partícula vinha diminuindo sua taxa de deslocamento e, a partir daí, ela começa a aumentar sua velocidade.

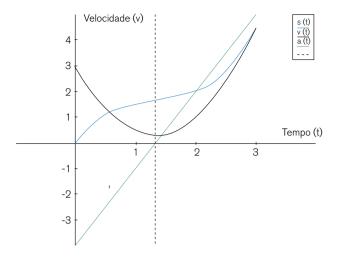



Figura 2.10

2.7 A Regra da Cadeia

Considere y uma função de t e t, por sua vez, uma função de x. Podemos escrever y = f(t) e t = g(x). Se quisermos expressar y em função de x, podemos escrever

$$y = f(g(x))$$

Dizemos, nesse caso, que y é a função composta (f · g)(x) (Lê-se: "função f da g de x". Vamos ilustrar através de um exemplo.

EXEMPLO 2.16

A função $y = (3x + 2)^2$ pode ser escrita na forma de função composta como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} y = t^2 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

Portanto, podemos estabelecer que

$$y = f(t) \qquad e \qquad t = g(x)$$

Portanto,

$$y = f(g(x)) \qquad ou \qquad y = (f \cdot g)(x)$$

Para determinar a derivada de y em relação a x, podemos, primeiro, desenvolver a expressão $(3x + 2)^2$ e, depois, aplicar as regras elementares de derivação adequadas, como mostrado a seguir.

$$y = (3x + 2)^2 \;\Rightarrow\; y = 9x^2 + 12x + 4$$
$$y' = 9 \cdot 2x^{2-1} + 12 \cdot 1x^{1-1} + 0 \;\Rightarrow\; y' = 18x + 12$$

Nesse caso, foi possível desenvolver a expressão que define y até chegar a uma forma polinomial para, depois, aplicar as regras elementares de derivação. Mas nem sempre esse desenvolvimento é possível ou viável. Sendo assim, é preciso determinar a derivada através de outro caminho. Vamos fazer isso considerando a função y escrita na forma composta:

$$\begin{cases} y = t^2 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

Se derivarmos y em relação a t e t em relação a x, teremos:

$$\frac{dy}{dt} = 2t \quad \text{e} \quad \frac{dt}{dx} = 3$$

Note que o produto $\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ entre essas duas derivadas é igual à derivada de y em relação a x. Veja:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= 2t \cdot 3 \\ &= 6t \end{aligned}$$

Como t = 3x + 2, então:

$$\frac{dy}{dx} = 6 \cdot (3x + 2)$$
$$= 18x + 12$$

Isso vale para toda função composta e esse processo de derivação é denominado Regra da Cadeia.

Definição:

Se y = f(t) e t = g(x) são funções deriváveis em t e x, respectivamente, então a derivada de y em relação a x, $\frac{dy}{dx}$, é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Também podemos escrever essa regra nas formas:

- $D_x y = D_t y \cdot D_x t$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $f'(x) = f'(t) \cdot g'(x)$

Vamos considerar, agora, um exemplo em que a *regra da cadeia* se faz necessária.

EXEMPLO 2.17

A função y =(2x + sen x)^5 pode ser escrita na forma:

$$\begin{cases} y = t^5 \\ t = 2x + \text{sen } x \end{cases}$$

Observemos que o desenvolvimento da expressão (2x + sen x)^5 é algo extremamento trabalhoso. Portanto, para derivá-la recomenda-se o uso da *regra da cadeia*, como ilustrado a seguir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = 5t^4 \cdot (2 + \cos x)$$

Como t =2x + sen x, podemos reescrever a derivada na forma

$$\frac{dy}{dx} = 5(2x + \text{sen } x)^4 \cdot (2 + \cos x)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = (2x + \text{sen } x)^4 \cdot (10 + 5\cos x)$$

EXEMPLO 2.18

Em seções anteriores, vimos regras de derivação para funções trignonométricas, logarítmicas e exponenciais. Mas em todas elas, as funções eram determinadas apenas para variável independente (x, geralmente). Por exemplo, a regra da derivada da função seno foi apresentada na forma:

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x$$

Mas, como podemos calcular a derivada de uma função tal como y =sen(x^2 − 1)?

Agora o seno refere-se não somente a x, mas a uma função de x. Nesse caso, podemos aplicar a regra da cadeia, considerando:

$$\begin{cases} y = \text{sen } t \\ t = x^2 - 1 \end{cases}$$

Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \cos t \cdot 2x$$

Considerando que t = x^2 − 1 , então

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 - 1) \cdot 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x\cos(x^2 - 1)$$

Note que a derivada de y =sen (x^2 – 1) é igual ao produto do (x^2 – 1) pela derivada de , que é 2x. De forma geral, sendo u uma função de x, podemos escrever:

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = (\cos u)u'$$

De forma análoga, acontece para as demais regras de derivação de funções trigonométricas e também com as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas inversas. A seguir são reapresentadas as fórmulas de derivação de todas essas funções, considerando u uma função de x e u' a sua derivada em relação a x.

- $\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = (\cos u)u'$
- $\frac{d}{dx}(\cos u) = (-\text{sen } u)u'$
- $\frac{d}{dx}(\text{tg } u) = (\sec^2 u)u'$
- $\frac{d}{dx}(\csc u) = (-\csc u \cdot \text{ cotg } u)u'$
- $\frac{d}{dx}(\sec u) = (\sec u \cdot \text{ tg } u)u'$
- $\frac{d}{dx}(\text{cotg } u) = (-\csc^2 u)u'$
- $\frac{d}{dx}(\text{arc sen } u) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arc cos } u) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arc tg } u) = \frac{1}{1+u^2}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arc csc } u) = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}(\text{cotg } u) = \frac{-u'}{1+u^2}$
- $\frac{d}{dx}(a^u) = (a^u \cdot \ln a)u'$
- $\frac{d}{dx}(e^u) = (e^u)u'$
- $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
- $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{u'}{u}$

2.8 Derivação Implícita

Derivar uma função y =f(x), geralmente, não é tarefa muito difícil, pois, já vimos várias regras de derivação que nos auxiliam nesse tipo de cálculo. Em todas as situações abordadas até aqui, a variável dependente y aparecia de forma isolada, isto é, era apresentada de forma explícita, como, por exemplo,

$$y = 2x^3 + x - 5 \quad (2.8)$$

Mas há diversas situações em que isso não ocorre. Veja como podemos também representar a função descrita em (2.8):

$$y = 2x^3 - x + 5 = 0 \quad (2.9)$$

Dizemos, nesse segundo caso, que a relação entre as variáveis x e y está na forma implícita. Mas é lógico que se você se deparar com uma função apresentada na forma (2.9), é possível isolar y para depois derivá-la, caso deseje, aplicando as regras de derivação apresentadas nas seções anteriores.

Um problema que surge com frequência é que há diversas funções que são escritas na forma implícita e não há como isolar a variável dependente y (ou, algumas vezes, o processo para isso é extremamente complicado). Veja o exemplo a seguir que apresenta uma situação desse tipo.

EXEMPLO 2.19

A equação $x^2 + y^2 = 9$ tem representação gráfica da por uma circunferência de raio igual a 3, com centro na origem do sistema cartesiano (ponto (0,0)).

Se quisermos, por exemplo, obter uma reta tangente a essa circunferência (curva) em um ponto qualquer, precisaremos determinar a derivada de y em relação a x.

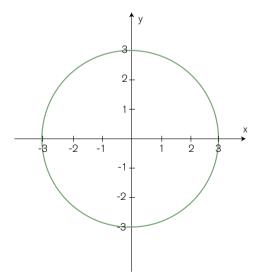



Figura 2.11

Na verdade, o gráfico da figura 2.11 não é gráfico de uma função, pois, na equação , a relação entre y e x não atende às exigências da definição de função (há valores de x que estão associados a mais do que um valor de y). Mas podemos dividir a circunferência em duas semicircunferências, uma acima do eixo x e outra abaixo. Elas são as representações gráficas, respectivamente, das funções:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$$

Podemos, portanto, obter diretamente a derivada de y em relação a x ou reescrever a relação entre essas duas variáveis na forma de duas ou mais funções e, a partir daí, determinar as suas derivadas. Mas, em alguns casos, a decomposição da equação em duas ou mais funções não é tão simples ou não é possível. Então, recomenda-se obter a derivada diretamente a partir da equação que relaciona x e y.

Veja um exemplo em que isso acontece e como você pode proceder.

EXEMPLO 2.20

A figura 2.12 apresenta o gráfico da equação $x^3 + y^3 - 8xy = 0$. Para escrever a relação entre x e y através de funções somente, precisaríamos dividir o gráfico em 4 partes (no gráfico representadas por f_1, f_2, f_3 e f_4), pois, pela definição de função, um mesmo valor x não pode associar-se a mais que um valor de y. Teríamos que "cortar" o gráfico nos pontos P e Q e, para cada uma das quatro partes, definiríamos uma função. Logo, é melhor (e mais fácil!) expressar essa relação através de uma equação (como ela está representada acima).

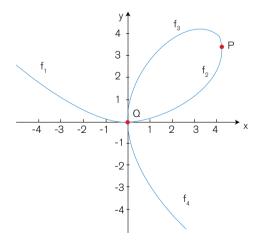



Figura 2.12

Mas a pergunta agora é a seguinte: como podemos determinar a derivada $\frac{dy}{dx}$ nos casos em que a variável y não está definida de forma explícita em relação a x ? É o que veremos. Para quem já está familiarizado com a aplicação das regras de derivação elementares não será difícil compreender o processo que será apresentado a seguir. Para tornar essa compreensão mais fácil, vamos tomar uma outra equação, um pouco mais simples que a do exemplo 2.20.

EXEMPLO 2.21

A equação $y^2 - x - 1 = 0$ pode ser definida através das funções:

$$y_1 = \sqrt{x+1} \quad e \quad y_2 = -\sqrt{x+1}$$

em que $x > 0$.

Suas derivadas em relação a x são, respectivamente:

$$y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \qquad (2.10)$$

e

$$y_2' = -\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \qquad (2.11)$$

No entanto, podemos utilizar o processo de ***derivação implícita*** a partir da equação $y^2 - x - 1 = 0$. Observe como.

Vamos começar derivando os dois lados dessa equação:

$$\frac{d(y^2 - x - 1)}{dx} = \frac{d(0)}{dx}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Note que esse resultado equivale às duas expressões dadas em (2.10) e (2.11). Temos:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

e

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} \Rightarrow \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{-2\sqrt{x+1}}$$

Vejamos outro exemplo.

EXEMPLO 2.22

Vamos determinar $\frac{dy}{dx}$ considerando a relação $x^2y + y^2x = 2$.

Derivando ambos os termos da equação em relação a x, temos:

$$\frac{d(x^2y + y^2x)}{dx} = \frac{d(2)}{dx}$$

$$\frac{d(x^2y)}{dx} + \frac{d(y^2x)}{dx} = 0$$

Para continuar o processo de derivação, será necessário aplicada a regra 5 (regra do produto) em cada uma das duas expressões do membro à esquerda.

$$\left[\frac{d(x^2)}{dx}y + \frac{dy}{dx}x^2\right] + \left[\frac{d(y^2)}{dx}x + \frac{dx}{dx}y^2\right] = 0$$

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy\frac{dy}{dx} = -2xy - y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 2xy) = -2xy - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy}$$

O exemplo seguinte mostra a aplicação da derivação implícita na demonstração da regra de derivação da função arco seno.

EXEMPLO 2.23

Para valores de x no intervalo [−1, 1], a função

$$y = \text{arc sen } x \tag{2.12}$$

também pode ser expressa por

$$\text{sen } y = x \tag{2.13}$$

e, nesse caso, teremos os valores de y no intervalo [− π/2, π/2].

Se derivarmos ambos os lados da equação (2.13), teremos:

$$\frac{d(\text{sen } y)}{dx} = \frac{dx}{dx}$$

$$(\cos y)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Como o cos y é sempre positivo para valores de y no intervalo [− π/2, π/2], então podemos substituí-lo por $\sqrt{1-(\text{sen } y)^2}$. E considerando a igualdade em (2.13), podemos escrever a $\frac{dy}{dx}$ na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

EXERCÍCIO

12. Derive cada uma das funções seguintes:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 10$

b) $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$

c) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 10$

d) $y = 2\text{sen}\, x + 3e^x - \dfrac{1}{x}$

e) $h(x) = \dfrac{5\cos x}{x^2}$

f) $y = x^2 \cdot \ln x$

g) $y = \dfrac{5e^x}{x^3} + 5x - 1$

h) $v(t) = -7\cos x \cdot \text{tg}\, x$

i) $y = \ln x^k - e^k$, com k constante

j) $t(x) = \dfrac{\cos x \cdot \text{cotg}\, x}{\sec x}$

13. Demonstre as seguintes regras de derivação:

a) $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \text{cotg}\, x$

b) $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \text{tg}\, x$

c) $\dfrac{d}{dx}(\text{cotg}\, x) = -\csc^2 x$

d) $\dfrac{d}{dx}(\text{arc cos}\, x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. Para cada uma das funções seguintes, determine os intervalos para os quais ela é crescente e quando é decrescente:

a) $y = (x+1)^5$

b) $y = -2(x^2 - 4)^3$

c) $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 4}$

d) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x$

15. Nas relações a seguir, encontre $\frac{dy}{dx}$:

a) $-x+2y-xy-3=0$

b) $y^2x-5x^3y-7x=9$

c) $\frac{-7y^2}{x}+\frac{x^3}{y}+2=0$

d) $x^2 \ln y + ye^x - 5 = 0$

e) $x \text{ arc } \cos y = 3 - x^3$

f) $3\ln(xy)=4$

g) $x \text{ sen } y + y\cos x = 1$

16. Uma população de bactérias, pouco tempo após passar por certo tratamento, começou a diminuir. Se considerarmos t = 0 h o instante em o tratamento foi finalizado, a função que fornece a quantidade n de bactérias em relação ao tempo t, é $n(t)=900.000+7.000x-950x^2$. Com base em tais informações, quais são as taxas de variação do número de bactérias n em função do tempo t, para os instantes t = 1 h, t = 3 h, t = 4 h e t = 7 h.

17. Num processo industrial, a temperatura y de um componente t minutos após a finalização de sua produção é dada por $y=50-2t+\frac{8}{t+2}$,para $0 \leq t \leq 20$ minutos.

a) Quais são as temperaturas desse componente nos instantes 2, 5 e 10 min após a finalização de sua produção.
b) E quais as taxas de variação da temperatura nesses instantes?

18. Quando ocorre um terremoto de magnitude x, a energia y (em joules) propagada como onda sísmica, na escala Richter, obedece a relação

$$\log_y = 4{,}8 + 1{,}5x$$

Nessa mesma escala, a magnitude x de um terremoto de intensidade t é dada por

$$x = \frac{\ln t - \ln t_0}{\ln 10}$$

em que t_0 é a intensidade mínima usada para comparação. Suponha $t_0 = 1$.

a) Determine a energia propagada por um terremoto de intensidade 6,0.

b) Qual é a variação instantânea de energia em relação à magnitude?

c) Qual é a variação instantânea de energia em relação à intensidade?

d) Calcule a variação instantânea de energia em relação à intensidade, quando esta é igual a 6.

19. Determine o coeficiente angular das retas tangentes à curva $y^2x^2 - x^3 - x + y = 0$ nos pontos de abscissas x = 0 e x = 2.

20. A derivada da função $y = kx^3 - 2x^2 + x - 1$ quando x = −1, é igual a 4. Determine o valor de k.

21. Um objeto é lançado verticalmente a partir do solo e sua altura h (em metros) após t segundos é dada por

$$h(t) = -t^2 + 12t$$

Utilizando a derivada dessa função, determine em que instante o objeto atinge sua altura máxima.

3

Aplicações das Derivadas

3.1 Introdução

Depois de compreender o conceito de derivada, seu significado e interpretação, tanto algébrica como gráfica, vamos, agora, realizar algumas das diversas aplicações que ela nos oferece. As informações que a derivada nos fornece sobre o comportamento de uma função podem ser utilizadas com diversas finalidades.

Uma aplicação de grande importância é a que se refere à determinação de valores extremos de funções, isto é, dos seus valores máximos e mínimos. Aplicações de funções que envolvem variáveis tais como temperatura, volume, tempo, custo, lucro, consumo, entre outras, são amplamente auxiliadas pela utilização das derivadas.

Há, também , aplicações que envolvem a determinação de retas tangentes e normais a uma curva. Vimos, inclusive, que a derivada de uma função em um ponto é igual ao coeficiente de inclinação da reta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto. A partir daí, veremos como determinar retas tangentes e também normais a uma curva.

3.2 Equações das retas tangente e normal

No capítulo 2, vimos que o coeficiente angular da reta tangente a uma curva $y = f(x)$ é igual ao valor da derivada $f'(x)$ calculada nesse ponto. Isto é, dada uma curva $y = f(x)$, derivável em x_0, o coeficiente angular da reta tangente ao seu gráfico no ponto (x_0, y_0) é igual a $f'(x_0)$. Denotando por m esse coeficiente, temos:

$$m = f'(x_0) \qquad (3.1)$$

Lembre-se que a equação da reta que passa por um ponto de coordenadas e (x_0, y_0)que tem coeficiente angular representado por m pode ser escrita na forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Dessa forma, destacando um ponto (x_0, y_0) de uma função $y = f(x)$, a ***reta tangente*** a essa função, nesse ponto, será dada por:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (3.2)$$

Vejamos esse procedimento através de um exemplo.

EXEMPLO 3.1

Vamos obter a reta tangente à curva $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 1$ no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

Para determinar o coeficiente angular da reta tangente, devemos, primeiro, derivar a função $y = f(x)$:

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 1$$

Em seguida, tomamos o coeficiente angular m como sendo o valor dessa derivada para $x_0 = 2$:

$$m = f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \Rightarrow m = -3$$

Também é necessário conhecer as coordenadas (x_0, y_0) do ponto de tangência. Como a abscissa x_0 desse ponto é 2, a ordenada y_0 será dada por:

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 - 1 \Rightarrow y_0 = 1$$

Agora, só falta substituir os valores na equação (3.2) e isolar a variável y :

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - 1 &= -3(x - 2) \\ y - 1 &= -3x + 6 \\ y &= -3x + 7 \end{aligned}$$

A figura 3.1 apresenta os gráficos de f(x) e de sua reta tangente no ponto (2,3).

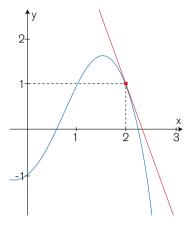



Figura 3.1

A reta normal a uma curva, num determinado ponto, é aquela que é perpendicular à reta tangente nesse ponto. E lembre-se que a relação entre os coeficientes de duas retas perpendiculares é dada por:

$$n = -\frac{1}{m} \tag{3.3}$$

em que n é o coeficiente angular da reta normal e m é o coeficiente angular da reta tangente à curva.

Considerando as igualdades (3.1) e (3.3), podemos representar o coeficiente angular da reta normal à curva f(x) no ponto (x_0, y_0) como

$$n = -\frac{1}{f'(x_0)} \tag{3.4}$$

Dessa forma, destacando um ponto (x_0, y_0) de uma função y = f(x) , a ***reta normal*** a essa função, nesse ponto, será dada por:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{3.5}$$

No exemplo a seguir, você verá como obter a reta normal a uma curva.

EXEMPLO 3.2

Vamos obter a reta normal à curva $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 1$ no ponto de abscissa $x_0 = 2$. Como já determinamos o coeficiente angular da reta tangente a essa curva no mesmo ponto, para determinarmos o coeficiente da reta normal basta utilizar a relação (3.4), considerando que $m = f'(x_0) = -3$. Temos, então:

$$n = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Portanto, de acordo com a igualdade (3.5), a reta normal será dada por:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{-3}(x - 2)$$

$$y - 1 = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

A figura 3.2 apresenta o gráfico da função f (x) com suas retas tangente e normal no ponto (1,2).

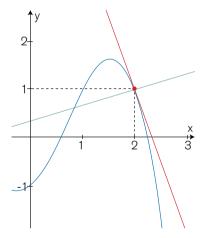



Figura 3.2

3.3 Taxas relacionadas

Considere dois móveis, A e B, que partem de um mesmo ponto e se deslocam em trajetórias que são perpendiculares entre si. A velocidade do móvel A é de 4 m/s e a do B, 3 m/s. É possível determinar a velocidade de distanciamento entre eles, a partir da velocidade de cada um?

Note que não conhecemos a função posição (que relaciona a posição de cada um com o tempo de deslocamento) de nenhum dos dois móveis, mas temos a taxa de variação da posição, x e y, em relação ao tempo t, que é a velocidade de cada um dos móveis. A partir daí, podemos determinar a taxa de variação, isto é, a velocidade de distanciamento entre os dois. Isso significa, que é possível determinar a taxa de variação de uma terceira variável em relação ao tempo t. A esse tipo de procedimento denominamos ***taxas relacionadas***. É uma aplicação das derivadas de vasta utilização em Física, Química, nas Engenharias e em outras áreas do conhecimento.

Vamos resolver o problema acima descrito no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3.3

Considerando o deslocamento dos móveis A e B em trajetórias perpendiculares, podemos considerar que A desloca-se sobre o eixo x e B sobre o eixo y. Os dois móveis partem do ponto O e, após certo tempo, encontram-se, respectivamente, nos pontos X e Y. A figura 3.3 apresenta um esquema ilustrativo dessa situação.

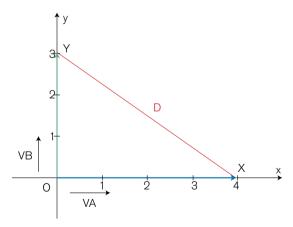



Figura 3.3

A velocidade V_A do móvel A pode ser expressa por $\frac{dx}{dt} = 4 \text{ m/s}$ já que significa a variação da sua posição no eixo x em relação ao tempo t. Da mesma forma, a velocidade V_B do móvel B será expressa por $\frac{dy}{dt} = 3 \text{ m/s}$. Se denotarmos (como mostra o gráfico) por D a distância entre os móveis A e B no instante t, o que desejamos determinar é a taxa de variação de D em relação a t, ou seja, queremos determinar $\frac{dD}{dt}$. A cada instante t, a relação entre a distância D entre os dois móveis e o espaço percorrido por cada um deles a partir do ponto O pode ser obtida através da aplicação do Teorema de Pitágoras como apresentado a seguir:

$$D^2 = x^2 + y^2 \qquad (3.6)$$

Derivando a expressão acima em relação a t, temos:

$$2D\frac{dD}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

Dividindo ambos os membros da equação por 2, chegamos a:

$$D\frac{dD}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

Como $\frac{dx}{dt} = 4 \text{ m/s}$ e $\frac{dy}{dt} = 3 \text{ m/s}$, podemos escrever:

$$D\frac{dD}{dt} = (4x + 3y) \text{ m/s} \qquad (3.7)$$

Finalmente, para podermos determinar $\frac{dD}{dt}$, podemos considerar quaisquer possíveis valores de D, x e y que satisfaçam a relação (3.6) e que obedeçam às condições impostas pelo problema. Para isso, vamos considerar, por exemplo, as posições dos móveis 1 segundo após o início do distanciamento. Então x = 4m, y = 3m e D = 5m. Substituindo esses valores na expressão (3.7), e isolando o termo $\frac{dD}{dt}$, temos:

$$5\frac{dD}{dt} = (4 \cdot 4 + 3 \cdot 3) \text{ m/s}$$

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{16+9}{5}\right) \text{ m/s}$$

$$\frac{dD}{dt} = 5 \text{ m/s}$$

Portanto, a velocidade de distanciamento entre os móveis é igual a 5 m/s.

Vamos abordar mais um exemplo de taxas relacionadas.

EXEMPLO 3.4

A potência elétrica P, em W, que é dissipada em um circuito elétrico, relaciona-se com a resistência elétrica R, em ohm, e à corrente elétrica I, em A, que circula nesse circuito, através da igualdade:

$$P = R \cdot I^2$$

A corrente elétrica está variando 2 A/min. Considerando a resistência R constante, qual é a variação da potência em relação ao tempo quando I = 5 A e R = 3 ohm?

Derivando todos os termos da expressão $P = RI^2$ em relação ao tempo t, temos:

$$\frac{dP}{dt} = 2R \cdot I \frac{dI}{dt}$$

Como a variação da corrente elétrica I em relação ao tempo t, que denotamos por $\frac{dI}{dt}$, é igual a 2 A/min, então a variação da potência em relação ao tempo pode ser expressa (em A/min) como:

$$\frac{dP}{dt} = 2R \cdot I \cdot 2$$
$$\frac{dP}{dt} = 4R \cdot I$$

Considerando que I = 5 A e R = 3 ohm, então, a variação da potência em relação ao tempo, nessas condições, é igual a:

$$\frac{dP}{dt} = 4 \cdot 3 \cdot 5 \text{ W/min}$$
$$\frac{dP}{dt} = 60 \text{ W/min}$$

3.4 Máximos e mínimos de funções e traçados de curvas

Considere, para começar, o gráfico seguinte que relaciona a temperatura f(x) observada em um experimento em relação ao tempo x, num determinado período que vai de a a b (representado pelo intervalo fechado [a, b]).

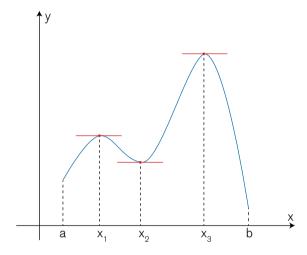



Figura 3.4

Note que, nos pontos de abscissas x_1, x_2 e x_3 a função apresenta valores ***máximos*** ou ***mínimos locais***. Nesses pontos, há uma mudança no sinal da taxa de variação da função. Traçando as retas tangentes (como mostra o gráfico da figura 3.4) em cada um desses pontos, veremos que elas são exatamente horizontais, ou seja, apresentam coeficiente angular nulo.

Analisando o gráfico, também podemos concluir que a função é crescente nos intervalos $[a, x_1]$ e $[x_2, x_3]$ e é decrescente nos intervalos $[x_1, x_2]$ e $[x_3, b]$. Pelo que já estudamos sobre derivadas, é possível concluir que nos intervalos abertos (a, x_1) e (x_2, x_3) a derivada da função f(x) assume somente valores positivos (para qualquer ponto desses intervalos). Já nos intervalos abertos (x_1, x_2) e (x_3, b) ela assume somente valores negativos. Nos pontos de abscissas x_1, x_2 e x_3 a derivada se anula (como mostra a figura 3.5).

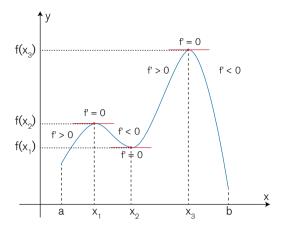



Figura 3.5

Pelas análises apresentadas, podemos chegar à definição que é apresentada a seguir.

Definição (3.1)

Considere uma função f definida em um intervalo I (aberto ou fechado). Podemos, então, concluir que

(i) f é **crescente** em I se para todo $x \in I,\ f'(x) > 0$

(ii) f é **decrescente** em I se para todo $x \in I,\ f'(x) < 0$

Se não ocorrer nenhuma das duas opções anteriores, dizemos, então, que f é **constante**.

A notação usual para representar uma função f que depende da variável x, como já vimos, é f(x). Em várias aplicações do Cálculo, há mais do que duas variáveis (x e y, por exemplo) envolvidas. Então, torna-se necessário representar qual delas define a função f. Como, neste livro, veremos apenas funções que dependem de uma única variável, então podemos, com frequência, utilizar somente uma letra (como, por exemplo, "f ", ou outra letra qualquer) para representá-las .

No exemplo a seguir, veremos como determinar se a função é crescente ou decrescente utilizando as derivadas.

EXEMPLO 3.5

Dada a função $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$, vamos determinar, em cada um dos pontos cujas abscissas são a seguir apresentadas, se ela é crescente ou decrescente:

c) x = − 1;

d) x = 0;

e) x = 4.

Para começar, vamos derivar a função f(x) :

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x-4\right)$$

$$f'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

Calculando o valor de f'(x) para os valores −1, 0 e 4, podemos concluir a respeito do comportamento da função f(x) quando ao seu crescimento ou decrescimento nesses pontos:

- $f'(-1)=\frac{-1-2}{\sqrt{(-1)^2-4(-1)+3}}=\frac{-3}{\sqrt{8}}<0\Rightarrow f(x)$ decrescente;
- $f'(0)=\frac{0-2}{\sqrt{0^2-4\cdot 0+3}}=\frac{-2}{\sqrt{3}}<0\Rightarrow f(x)$ decrescente;
- $f'(4)=\frac{4-2}{\sqrt{4^2-4\cdot 4+3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}>0\Rightarrow f(x)$ crescente;

Compare os resultados obtidos com o comportamento do gráfico da função $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ que é apresentado na figura 3.6.

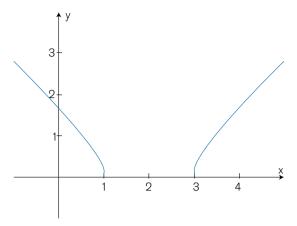



Figura 3.6

Vamos, agora, voltar a analisar o gráfico da figura 3.5. Além de determinar quando a função é crescente ou decrescente, é importante determinar quando a função atinge seus valores de máximos e de mínimos locais ou absolutos. Determinar, por exemplo, a quantidade x que torna o lucro f máximo, ou encontrar o instante x em que a temperatura f de uma solução atinge seu valor mínimo (ou máximo) requer cálculos que envolvem derivadas.

Uma função f atinge seu valor máximo ou mínimo em um valor específico x_0 se $f'(x_0) = 0$. Observe o gráfico da figura 3.5 e note que quando a função tem valores máximos e/ou mínimos, as retas tangentes ao gráfico em tais pontos são horizontais, isto é, têm coeficiente angular igual a zero.

Vale ressaltar que se uma função atinge valor extremo (máximo ou mínimo, local ou absoluto) em x_0, então $f'(x_0) = 0$. No entanto, o fato de termos $f'(x_0) = 0$ não implica necessariamente que a função atinge um valor extremo em x_0. Pode estar ocorrendo aí um ***ponto de inflexão*** no gráfico, que significa uma mudança de concavidade. Os gráficos da figura 3.7 apresentam pontos de inflexão.

Quando temos $f'(x_0) = 0$, o valor x_0 é denominado ***ponto crítico*** da função f. Um ponto crítico pode ser ponto de ***máximo***, ***mínimo*** ou ***inflexão*** da função.

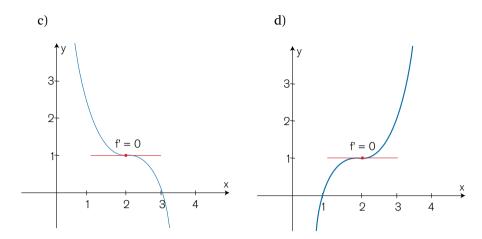



Figura 3.7

Um ponto de máximo ou de mínimo local de uma função indica que a função atinge seu valor máximo ou mínimo naquele ponto, em um certo intervalo I. A função pode, por exemplo, assumir um valor máximo local quando $x_0 = 0$, mas o valor de $f(x_0)$ pode não ser o maior valor que a função assume, se considerarmos outros intervalos do seu domínio. Para concluirmos que um ponto de máximo é absoluto (ou, de forma análoga de mínimo absoluto) é preciso verificar se dentre todos os pontos de máximo (ou de mínimo), ele é aquele em que a função assume seu maior valor. Também é necessário verificar que nas extremidades do domínio da função ela não atinge valores maiores do que os pontos de máximo obtidos.

Utilizaremos, a partir de agora, a expressão "***extremos***" para nos referirmos à máximo ou mínimos de funções.

Os extremos absolutos de uma função também podem ocorrer em pontos de abscissa x_0 para os quais $f'(x_0) = 0$. Isso acontece quando tais extremos são pontos marginais dos intervalos que definem o domínio da função. Nesse caso, eles são considerados ***extremos marginais***.

Vamos ver um exemplo em que isso ocorre.

EXEMPLO 3.6

A função $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ tem seu gráfico mostrado na figura 3.8.

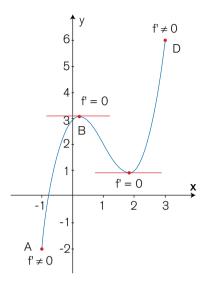



Figura 3.8

Nos pontos B e C, o valor da derivada da função f(x) é igual a zero. O ponto B é um ponto de máximo local e o ponto C é um ponto de mínimo local. No entanto, nos pontos A e D (em que a derivada da função f(x) não é igual a zero), temos os extremos absolutos da função. Eles são denominados *extremos marginais*.

Mas como podemos determinar os pontos críticos de uma fução e, depois, classificá-los em ponto de *máximo*, *mínimo* ou *inflexão*? Vamos começar analisando o gráfico da figura 3.9 que apresenta uma curva, em um intervalo [a, b], que possui esses três tipos de pontos.

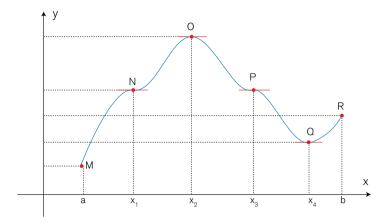



Figura 3.9

Os pontos M e R são pontos marginais e o ponto M, em particular, é o ponto de ***mínimo absoluto*** (ou ***mínimo marginal***) da função. Os pontos N e P são pontos de ***inflexão***. O ponto O é ponto de ***máximo absoluto*** e o ponto Q é ponto de ***mínimo local***. As conclusões apresentadas não são difíceis de se obter, pois estamos vendo com clareza como a função se comporta, no seu domínio [a,b]. Mas não é sempre que teremos o gráfico à nossa disposição para podermos analisá-lo, ou se o tivermos, muitas vezes não é possível (apenas pela análise do gráfico) determinar com precisão os valores das coordenadas dos pontos críticos. Vamos, então, tirar algumas conclusões tomando por base o gráfico da Figura 3.9 para que possamos obter um processo algébrico que nos permita classificar os pontos críticos.

Considere, inicialmente, o ponto de inflexão N. Nos intervalos (a, x_1) à sua esquerda e (x_1, x_2) à sua direita a função é crescente. O outro ponto de inflexão, que é o ponto P, tem a função decrescente tanto no intervalo (x_2, x_3) à sua esquerda, como no intervalo (x_3, x_4) à sua direita. Podemos concluir, então, que quando ocorre um ponto de inflexão, a função é crescente tanto na vizinhança próxima à sua esquerda quanto à sua direita ou a função é decrescente tanto na vizinhança próxima à sua esquerda quanto à sua direita. Quando o ponto é um ponto de máximo, como o ponto O, note que a função é crescente na vizinhança próxima à sua esquerda e, à direita, ela é decrescente. No caso de ponto de mínimo, como o ponto Q, a função é decrescente na vizinhança próxima à esquerda e, à direita, ela é crescente. Essas conclusões nos ajudarão a formular um teste algébrico (que será abordado mais adiante) para classificar os pontos críticos de uma função de maneira ágil e prática.

Vamos ver mais alguns exemplos para compreender o processo de classificação de pontos críticos. Serão utilizados exemplos simples de funções para facilitar a compreensão do processo lógico utilizado e você verá que não será difícil generalizar os resultados obtidos.

EXEMPLO 3.7

A função quadrática $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, já sabemos, tem seu ponto de máximo quando $x = 3$ (que é a abscissa do seu vértice). Seu gráfico está representado na figura 3.10.

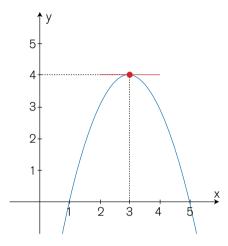



Figura 3.10

Assim como visto no exemplo anterior, se destacarmos o ponto máximo da função, à sua esquerda a função é crescente e à direita ela é decrescente. Isso caracteriza um ponto máximo. Vamos observar mais uma característica de um ponto máximo. Comecemos calculando a derivada da função $f(x)$:

$$f'(x) = -2x + 6$$

Agora, vamos calcular o valor dessa derivada para alguns valores arbitrários de x:

- $f(0) = -2 \cdot 0 + 6 = 6$
- $f(1) = -2 \cdot 1 + 6 = 4$
- $f(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$
- $f(3) = -2 \cdot 3 + 6 = 0$
- $f(4) = -2 \cdot 4 + 6 = -6$
- $f(5) = -2 \cdot 5 + 6 = -4$
- $f(6) = -2 \cdot 6 + 6 = -6$

Mesmo considerando que os cálculos acima foram feitos apenas para alguns valores de x, não é difícil perceber, por exemplo, que se tomarmos qualquer valor na vizinhança próxima à esquerda de $x = 3$, o valor da derivada será positivo. Já na vizinhança à esquerda, a derivada será negativa. Isso indica que a função é crescente à esquerda e decrescente à direita, como já esperávamos.

Outro fato será importante nessa análise. Note que os valores da derivada $f'(x)$, são decrescentes, à medida que x aumenta, tanto à esquerda do ponto crítico como à direita. Isso também pode ser concluído a partir da análise da derivada segunda da função $f(x)$:

$$f''(x) = -2x + 6$$

Observe que a derivada segunda é negativa para todo e qualquer valor de x. Isso indica que a derivada primeira $f'(x)$ é sempre *decrescente*. Portanto, ela será decrescente também quando consideramos o ponto crítico $x = 3$ e a sua *derivada segunda será negativa*.

Vamos a um exemplo semelhante ao anterior, mas para analisar o comportamento da função quando ocorre um ponto mínimo.

EXEMPLO 3.8

A função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 6$ tem seu ponto de máximo quando $x = 2$. Seu gráfico está representado na figura 3.11.

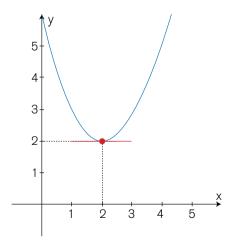



Figura 3.11

Destacando o ponto mínimo da função, vemos que à sua esquerda a função é decrescente e à direita ela é crescente, como já era esperado. A derivada da função f(x) é:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Agora, vamos calcular o valor dessa derivada para alguns valores arbitrários de x:

- $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$
- $f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$
- $f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$
- $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$
- $f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$
- $f(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$
- $f(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$

Note que, agora, quando tomamos valores nas vizinhanças próximas ao ponto crítico $x = 2$, a derivada f'(x) da função será negativa à sua esquerda e positiva à sua direita, isto é, a função f(x) decresce à esquerda do ponto crítico e cresce à sua direita.

A derivada segunda da função f(x) é:

$$f''(x) = 2$$

Aqui, a *derivada segunda é positiva* para todo e qualquer valor de x, o que indica que a derivada primeira f'(x) é sempre crescente. Portanto, ela será crescente também quando consideramos o ponto crítico $x = 2$ e a sua *derivada segunda será positiva*.

O próximo exemplo apresenta o mesmo tipo de análise dos dois exemplos anteriores quando se trata de um ponto de inflexão.

EXEMPLO 3.9

A função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ tem ponto inflexão quando $x = 1$. Na vizinhança próxima à esquerda desse ponto, a função é crescente e, à direita, também. O gráfico dessa função é mostrado na figura 3.12.

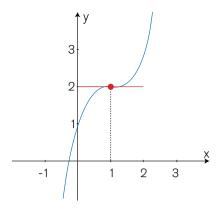



Figura 3.12

Sua derivada é:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

Tomando alguns valores arbitrários de x e calculando, para cada um deles, a derivada de f(x), temos:

- $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 6(-2) + 3 = 27$
- $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 6(-1) + 3 = 12$
- $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 3 = 3$
- $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = 0$
- $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 3$
- $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = 12$
- $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 3 = 27$

É possível notar que a função f(x) é crescente, tanto à esquerda quanto à direita do ponto crítico (que nesse caso, é de inflexão). Vamos analisar, agora, o comportamento da sua derivada f'(x) a partir da derivada segunda de f(x):

$$f''(x) = 6x - 6$$

A derivada segunda f''(x) é uma função do primeiro grau, crescente, cuja raiz é igual a 1. Isso significa que ela é negativa para valores de x menores que 1 e positiva para valores

maiores que 1. Isso indica que a derivada primeira f'(x) é decrescente para valores de x menores que 1 e crescente para valores maiores que 1. Se considerarmos x = 1, que é o ponto crítico, a *derivada segunda se anula*.

EXEMPLO 3.10

Considere, agora, a função $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 3$ que também tem ponto inflexão quando x= 1. No entanto, na vizinhança próxima à esquerda desse ponto, a função é decrescente e, à direita, também. O gráfico desse função é mostrado na figura 3.13.

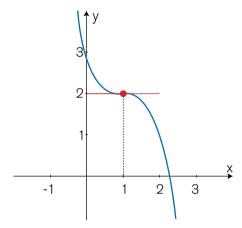



Figura 3.13

Sua derivada é:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3$$

Tomando valores arbitrários de x e calculando, para cada um deles, a derivada de f(x), temos:

- $f(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 6(-2) -3 = -27$
- $f(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 6(-1) - 3 = -12$
- $f(0) = -3 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 3 = -3$
- $f(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 3 = 0$
- $f(2) = -3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 3 = -3$

- $f(3) = -3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 3 = -12$
- $f(4) = -3 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 - 3 = -27$

Nesse caso, notamos que a função f(x) é decrescente, tanto à esquerda quanto à direita do ponto crítico (que, aqui também, é ponto de inflexão). Vamos analisar o comportamento da sua derivada f'(x) a partir da derivada segunda de f(x):

$$f''(x) = -6x + 6$$

A derivada segunda f''(x) é uma função do primeiro grau, decrescente, cuja raiz é igual a 1. Isso quer dizer que ela é positiva para valores de x menores que 1 e negativa para valores maiores que 1, isto é, a derivada primeira f'(x) é crescente para valores de x menores que 1 e decrescente para valores maiores que 1. Se considerarmos $x = 1$, que é o ponto crítico, a *derivada segunda se anula*.

EXEMPLO 3.11

Neste exemplo, vamos ver que pode ocorrer um ponto de inflexão (mudança de concavidade) sem que se tenha $f'(x) = 0$. Considere a função $f'(x) = x^3 - x + 1$. Observe sua representação gráfica na figura 3.14. Em destaque, podemos ver que há um ponto de inflexão de coordenadas (0,1) e é possível perceber que, nesse ponto, a derivada primeira é diferente de zero. Também, pela análise do gráfico podemos ver que a função ponto de máximo e de mínimo locais, mas, agora, vamos nos preocupar apenas com o ponto de inflexão.

Como o ponto de inflexão dessa função não surge quando fazemos $f'(x) = 0$, então devemos igualar a derivada segunda a zero e resolver a equação resultante, como mostrado a seguir:

$$f'(x) = 0$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

O cálculo só veio confirmar o que já podíamos ver no gráfico. Quando $x = 0$, a função muda de concavidade. Como $f''(x) < 0$, quando $x < 0$, então concluímos que, nesse intervalo, a concavidade é voltada para baixo. Para valores de $x > 0$, temos $f''(x) > 0$ e, consequentemente, a concavidade da função é voltada para cima.

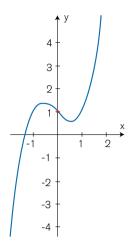



Figura 3.14

Pelos resultados apresentados nos exemplos 3.7-11, podemos apresentar um procedimento para classificar pontos críticos de quaisquer funções.

Diretrizes para determinar e classificar os pontos críticos de uma função

Considere uma função f(x) contínua em um intervalo I. Para determinar e classificar os seus pontos críticos nesse intervalo, você pode seguir os seguintes passos:

1. Derive a função f(x), obtendo f'(x).

2. Iguale a sua derivada primeira a zero para determinar o(s) ponto(s) crítico(s): f'(c) = 0.

3. Sendo c um ponto crítico da função, obtenha a derivada segunda f''(x) e calcule seu valor para x = c.

4. Para avaliar se c é ponto de máximo, mínimo ou inflexão considere o seguinte:

I. se f'(c) = 0, então a função f(x) tem uma **inflexão** em ;
II se f'(c) > 0, então a função f(x) tem um **mínimo** local em ;
III. se f'(c) < 0, então a função f(x) tem um **máximo** local em .

5. Para verificar se há mais algum ponto de inflexão (nos casos em que f'(c) ≠ 0), determine o valor de c tal que f'(c) = 0.

Vamos aplicar essas diretrizes nos exemplos seguintes:

EXEMPLO 3.12

Considere a função $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 6$. Vamos determinar seus pontos críticos (se eles existirem) e classficá-los.

Seguindo as diretrizes apresentadas anteriormente, primeiro, devemos obter a derivada de f(x):

$$f'(x) = -4x^3 + 4x$$

Igualando essa derivada a zero e resolvendo a equação resultante, temos:

$$f'(x) = 0$$
$$-4x^3 + 4x = 0$$
$$x(-4x^2 + 4) = 0$$

Daí, podemos concluir que:

$$-4x^3 + 4x = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad -4x^2 = -4$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

As raízes da derivada primeira são, portanto, −1, 0 e 1. Esses são os pontos críticos da função f(x).

Para classificá-los, precisamos da derivada segunda de f(x) que é:

$$f''(x) = -12x^2 + 4x$$

Calculando o valor dessa derivada segunda para cada um dos pontos críticos, chegamos às conclusões desejadas, como mostrado a seguir:

- $f''(-1) = -12(-1)^2 + 4 = -8 < 0 \Rightarrow x = -1$ é ponto de máximo local;
- $f''(0) = -12 \cdot 0^2 + 4 = 4 > 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto de mínimo local;
- $f''(1) = -12 \cdot 1^2 + 4 = -8 < 0 \Rightarrow x = 1$ é ponto de máximo local;

A figura 3.15 apresenta o gráfico da função $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 6$. Note que o mínimo local obtido não se configura como mínimo absoluto, pois a função assume valores ainda menores à medida que x aumenta ou diminui indefinidamente.

Quando determinamos, por exemplo, um ponto de máximo (ou mínimo) local, estamos obtendo o valor de x que torna o valor da função máximo (ou mínimo) e não o valor máximo (ou mínimo) da função. Nesse exemplo, se quisermos determinar os valores máximos e o mínimo local, devemos calcular o valor da função para cada um dos pontos críticos obtidos. Vejamos:

- $f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2 + 6 = 7$
- $f(0) = -0^4 + 2 \cdot 0^2 + 6 = 6$
- $f(1) = -1^4 + 2 \cdot 1^2 + 6 = 7$

Concluímos, então, que o valor máximo (absoluto) que a função assume é 7 e que 6 é um mínimo local, pois, podemos perceber, analisando o seu gráfico que a função assume valores que tendem a $-\infty$.

Para verificar se há algum ponto de inflexão, vamos igualar a derivada segunda a zero e resolver a equação resultante:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -12x^2 + 4 &= 0 \\ -12x^2 &= -4 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \\ x &= \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

A função, portanto, tem mudança de concavidade nos pontos de abscissas $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, que são também indicados na figura 3.15. Se você quiser determinar a concavidade em cada um dos intervalos resultantes, calcule o valor da derivada segunda para um valor qualquer do intervalo em questão. No caso da função que estamos estudando, a partir dos pontos de inflexão obtidos, podemos destacar três intervalos para analisar a concavidade:

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) e \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$$

Como podemos escolher qualquer valor de cada um dos intervalos, convém facilitar os cálculos, escolhendo valores inteiros. Para cada uma deles, vamos considerar, respectiva-

mente, os valores −1, 0 e 1 (note que tais valores já foram utilizados para determinar o valor da derivada segunda). Como já vimos:

- $f''(-1) = -8 < 0 \Rightarrow$ em $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ a função tem concavidade voltada para baixo;
- $f''(0) = -12 > 0 \Rightarrow$ em $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ a função tem concavidade voltada para cima;
- $f''(1) = -8 < 0 \Rightarrow$ em $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ a função tem concavidade voltada para baixo.

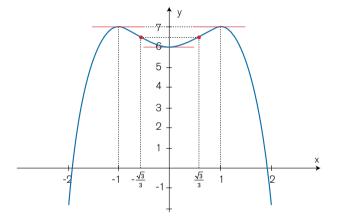



Figura 3.15

EXEMPLO 3.13

Vamos determinar e classificar os pontos críticos da função f(x) = cos x + sen x, no intervalo $[0,2\pi]$.

Derivando f(x), temos:

$$f(x) = -\text{sen } x + \cos x$$

Igualando f'(x) = 0, temos:

$$f'(x) = 0$$

$$- \text{sen } x + \cos x = 0$$

$$\cos x = \text{sen } x$$

Os valores de x que satisfazem a equação acima, no intervalo considerado, são: $\frac{\neq}{4}, \frac{3\neq}{4}, \frac{5\neq}{4}$ e $\frac{7\neq}{4}$. Eles são os pontos críticos da função f(x).

A derivada segunda é dada por:

$$f''(x) = -\cos x - \text{sen } x$$

Calculando o valor da derivada segunda para cada um dos pontos críticos obtidos, podemos concluir sobre os extremos ou inflexões da função. Veja a seguir:

- $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} - \text{sen } \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ é ponto de máximo;
- $f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{3\pi}{4} - \text{sen } \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ é ponto de inflexão;
- $f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\frac{5\pi}{4} - \text{sen } \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ é ponto de mínimo;
- $f''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\cos\frac{7\pi}{4} - \text{sen } \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$ é ponto de inflexão.

Nas extremidades do domínio da função, ela assume os seguintes valores:

- f(0) = cos 0 + sen 0 = 1 + 0 =1 ;
- f(2π) = cos 2π + sen 2π = 1 + 0 =1.

Podemos, portanto, concluir que os pontos de abscissas $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$ são, respectivamente, pontos de máximo e de mínimo absolutos da função no intervalo considerado.

A figura 3.16 apresenta do gráfico da função .

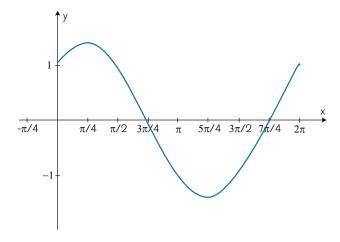



Figura 3.16

O processo de determinação de máximos e mínimos de funções será utilizado na próxima seção, em algumas aplicações práticas bem interessantes. Ele é fundamental em diversos problemas de otimização.

3.5 Modelagem e otimização

Na resolução de problemas, dos tipos mais diversos, é comum observarmos as variáveis envolvidas no fenômeno em questão para percebermos a relação entre entre elas. Em seguida, buscamos técnicas matemáticas que possam auxiliar na resolução do problema, tornando esse caminho mais simples e fácil.

Esse tipo de processo passa pelo que chamamos ***modelagem matemática***, que é o procedimento pelo qual escrevemos na linguagem matemática a relação entre as variáveis envolvidas em um determinado fenômeno para, depois, buscarmos as técnicas matemáticas adequadas para a obtenção da solução do problema.

Entre as técnicas mais utilizadas, no Cálculo Diferencial e Integral, após a modelagem, está a otimização, que consiste em minimizar ou maximizar uma ou mais variáveis envolvidas no problema. Considere, por exemplo, que um gerente de produção possa estar interessado em determinar qual deve ser a quantidade produzida de certa utilidade para que o seu custo unitário seja mínimo. Ou podemos estar interessados em determinar qual deve ser a quantidade produzida e vendida de certo bem para que se tenha lucro máximo.

Vamos começar a ilustrar um processo de modelagem e otimização através de um exemplo prático, que não é difícil de compreender. Veja a seguir.

EXEMPLO 3.14

Voce dispõe de um pedaço retangular de papelão, de dimensões 40 cm e 60 cm e deverá dobrá-lo (perpendicularmente à base), como indicado na figura 3.17, de tal forma a obter uma caixa (sem tampa) na forma de paralelepípedo que tenha o maior volume possível.

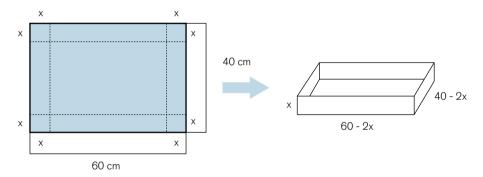



Figura 3.17

Se, após realizadas as dobras, a caixa tiver altura igual a x, a largura e o comprimento de sua base terão medidas expressas por $40 - 2x$ e $60 - 2x$. Sendo assim, o seu volume V poderá ser expresso por:

$$V(x) = x\,(40 - 2x)\,(60 - 2x) \qquad (3.8)$$

A expressão em (3.8) pode ser escrita na forma polinomial, como mostrado a seguir:

$$V(x) = 2.400x - 200x^2 + 4x^3 \qquad (3.9)$$

O problema, aqui, consiste em determinar a medida x que proporcionará o maior volume V possível. Vamos, então, determinar o ponto de máximo (se ele existir) da função V(x). Para isso, vamos resolver a equação V'(x) = 0 para determinar os pontos críticos da função V(x);

$$2.400x - 400x + 12x^2 = 0 \qquad (3.10)$$

As raízes (aproximadas) da equação (3.10) são 7,8 e 25,5. Como não é possível, nessa aplicação, que x assuma valor igual ou maior que 20 (pois uma das dimensões da cartolina é igual a 40 cm e, portanto, não há como construir uma caixa em que as abas tenham 20 com ou mais), então vamos considerar apenas o ponto crítico x = 7,8 cm. Precisamos, no entanto, verificar se esse ponto é de máximo. Para isso, vamos utilizar a derivada segunda da função volume:

$$V''(x) = -400 + 24x \qquad (3.11)$$

Substituindo x por 7,8 na expressão em (3.11), temos:

$$V''(x) = -400 + 24 \cdot 7{,}8 = -212{,}8$$

Como o valor obtido é negativo, podemos concluir que x = 7,8 (valor aproximado) é ponto de máximo da função. Logo, o maior volume da caixa ocorrerá quando ela tiver dimensões: 7,8 cm; 24,4 cm (que é igual a 40 – 2 · 7,8) e 44,4 cm (que é igual a 60 – 2 · 7,8).

EXEMPLO 3.15

Suponha que desejamos construir cilindros utilizando chapas metálicas, sendo que cada um deverá utilizar exatamente 500 cm^2 de material, desprezando as dobras e encaixes. Quais devem ser, então, as dimensões (altura e raio), em centímetros, para que o seu volume seja máximo?

A figura 3.18 apresenta um esquema com as indicações das medidas h (altura do cilindro) e r (raio da base do cilindro).

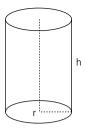



Figura 3.18

A quantidade de material utilizada em cada cilindro é dada pela superfície total (externa) do cilindro. Essa superfície, que denotaremos por S, é a soma das superfícies das duas bases (que são círculos de raio r) com a superfície lateral (que é um retângulo de base igual a $2\pi r$ e altura h). Sendo assim, podemos escrever:

$$S = \text{área lateral} + \text{área das bases}$$
$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

De forma fatorada, podemos expressar a superfície S como:

$$S = 2\pi r(h + r) \qquad (3.12)$$

Como a superfície deve ser igual a 500 cm^2, então podemos reescrever a expressão em (3.12), na forma:

$$2\pi r(h + r) = 500 \qquad (3.13)$$

Agora, vamos isolar a variável h, para que a relação entre ela e o raio fique na forma explícita. Vale ressaltar que, nesse ponto, podemos escolher a variável que será isolada. Você deve escolher aquela que torna esse processo mais simples, mas, seja qual for a escolha, o resultado final deve ser o mesmo. Isolando, portanto, h a partir da expressão (3.13), temos:

$$h = \frac{250}{\pi r} - r \qquad (3.14)$$

Agora, partiremos para a função que desejamos **otimizar**, nesse caso, **maximizar**, que é a função que fornece o volume do cilindro. Ela é expressa em função do raio r da base e da altura h, como a seguir:

$$V = \pi r^2 h \qquad (3.15)$$

Para maximizá-la, precisamos, antes, escrevê-la em função de apenas uma das variáveis, r ou h, pois, teremos que derivá-la. Como em (3.14) temos a altura h expressa como uma função do raio r, então, substituindo essa expressão em (3.15), teremos a função volume V expressa em relação ao raio r, como mostrado a seguir:

$$V = \pi r^2 \left(\frac{250}{\pi r} - r \right)$$

Simplificando a expressão obtida, chegamos a:

$$V = 250 r - \pi r^3 \qquad (3.16)$$

A derivada da função volume V em (3.16) é:

$$V = 250 - 3 \pi r^2 \qquad (3.17)$$

Igualando a derivada em (3.17) a 0 e resolvendo a equação resultante, chegamos aos seus pontos críticos. Vejamos:

$$\begin{aligned} V' &= 0 \\ 250 - 3\pi r^2 &= 0 \\ 3\pi r^2 &= 250 \\ r^2 &= \frac{250}{3\pi} \\ r &= \pm\sqrt{\frac{250}{3\pi}} \\ r &= \pm 5\sqrt{\frac{10}{3\pi}} \end{aligned}$$

Como r > 0, então consideraremos como ponto crítico apenas $r = 5\sqrt{\frac{10}{3\pi}}$.

Agora, precisamos verificar se esse ponto crítico é ponto de máximo ou não. Para isso, vamos realizar o teste com a derivada segunda de V. A derivada segunda é dada por:

$$V'' = -6\pi r \qquad (3.18)$$

Calculando o valor da derivada segunda em (3.18) para o valor crítico obtido, temos:

Como o valor obtido é menor que zero, então o ponto crítico $r = 5\sqrt{\frac{10}{3\pi}}$ é realmente um ponto de máximo da função V. Dizemos que ele é o ponto que **maximiza** a função V. Esse valor, considerado para o raio, otimiza a função volume, isto é, nas condições apresentadas, se o raio for de medida igual a $r = 5\sqrt{\frac{10}{3\pi}}$ cm, o cilindro que será obtido será o de maior volume possível. Mas para "conhecer" de fato esse cilindro, ainda precisamos saber qual deve ser sua altura. Antes, vamos obter uma aproximação para a medida do raio:

$$r = 5\sqrt{\frac{10}{3\pi}} \cong 5{,}15\ cm$$

Se retomarmos a relação em (3.14), chegamos ao valor (aproximado) desejado de h:

$$h = \frac{250}{\pi\ r} - r \cong 10{,}30\ cm$$

Você pode certificar-se que um cilindro com raio igual a 5,15 cm e altura igual a 10,30 cm, tem superfície (aproximadamente) igual a 500 cm^2 e o volume será (aproximadamente) o maior possível.

EXEMPLO 3.16

Uma bateria tem voltagem fixa V =12 volts (V) e sua resistência interna r = 2 Ω (ohm) liga-se a um circuito cuja resistência é variável. Se denotarmos por R a resistência desse circuito, a sua corrente elétrica, em Ampère (A) será expressa pela Lei de Ohm:

$$I = \frac{12}{R+2} \qquad (3.19)$$

A força resultante P (em W) é dada por:

$$P = I^2 R \qquad (3.20)$$

Como podemos determinar o valor da resistência R que proporcionará força máxima? E qual é a força máxima?

Primeiro, devemos verificar qual é a função que desejamos maximizar e em relação à qual variável independente ela deverá ser expressa. No caso desse exemplo, a função que desejamos maximizar é função P, que expressa a força. Ela deverá ser expressa em função da variável R. Isso significa que devemos obter P apenas em função de R para que possamos maximizá-la em relação a essa variável. Portanto, nosso primeiro passo, aqui, é obter a função P(R), função força em relação à resistência R.

A expressão (3.20) apresenta a força P em função da corrente elétrica I e da resistência R. Como a expressão (3.19) apresenta justamente a corrente elétrica em função da resistência, podemos substituí-la na expressão (3.20), como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{12}{R+2}\right)^2 R \\ P &= \frac{144R}{(R+2)^2} \\ P &= 144\frac{R}{R^2+4R+4} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Lembre-se que V é uma constante (voltagem fixa). A partir de agora, devemos derivar a função P e igualar essa derivada a zero para determinar os pontos críticos de P. A derivada de P é:

$$P' = 144\frac{-R^2+4}{\left(R^2+4R+4\right)^2} \tag{3.22}$$

Igualando a derivada em (3.22), temos:

$$144\frac{-R^2+4}{\left(R^2+4R+4\right)^2} = 0 \tag{3.23}$$

Como R representa valores positivos, então a expressão $R^2 + 4R + 4$ também é positiva. Sendo assim, a solução da equação em (3.23) será obtida fazendo:

$$-R^2+4=0 \Rightarrow R=2 \quad (R>0)$$

O ponto crítico R = 2 é ponto de máximo (você pode certificar-se disso, calculando a derivada de segunda de P para R = 2.). Para determinar qual é a o valor da força máxima P, vamos substituir R por 2 na expressão (3.21):

$$P_{máx} = 144 \frac{2}{2^2 + 4 \cdot 2 + 4} = 36\ W$$

Para se conhecer o valor numérico de $P_{máx}$ é preciso conhecer a voltagem do circuito.

As aplicações das derivadas são inúmeras e nas mais diversas áreas do conhecimento. Nas ciências exatas, sociais e naturais há uma infinidade de situações em que o conhecimento de taxas de variações de funções e seus valores extremos são fundamentais no desenvolvimento, fundamentação e aplicação de teorias. Neste capítulo foram apresentados apenas alguns exemplos de tais aplicações, mas que servem de base para que você compreenda os conceitos e domine as técnicas necessárias à aplicação desse que é um dos principais assuntos da matemática. No próximo capítulo, você conhecerá outro tópico do Cálculo Diferencial e Integral tão importante, em suas aplicações, quanto às derivadas. É um processo que, inicialmente, será apresentado como uma espécie de "operação inversa" do processo de derivação: a integral. Para um bom aproveitamento no estudo das integrais é imprescindível o domínio das técnicas de derivação e do significado de uma derivada.

4

Integração

4.1 Integral indefinida

As operações matemáticas elementares possuem suas operações inversas. Com o processo de derivação não é diferente. O processo inverso ao da derivação é o da integração. Este capítulo é voltado ao estudo das integrais. Veremos definições, significados, características e propriedades das integrais. Apesar de algumas aplicações serem apresentadas, o Capítulo 5 é que será destinado a apresentar as principais aplicações das integrais.

Até o momento, calculamos a derivada $f'(x)$ de uma função $f(x)$ para resolver diversos tipos de problemas. Você certamente se lembra dos casos em que, a partir da função posição de um móvel, conseguimos determinar sua função velocidade. Se denotamos a função posição (em relação ao tempo x) por $f(x)$, a função que fornecerá a velocidade desse móvel no instante x será dada por sua derivada $f'(x)$. Mas, e se conhecemos apenas a função velocidade $f'(x)$, é possível determinar sua função posição $f(x)$?

A resposta é "sim". A operação que nos permite realizar esse tipo de processo é denominada integração. Se $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$, podemos dizer que $f'(x)$ é uma integral de $f(x)$. As derivadas e as integrais são os instrumentos mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral.

Nos capítulos anteriores, vimos que, dada uma função $f(x)$, a sua derivada $f'(x)$ é única. Isto significa que conseguimos determinar exatamente a derivada $f'(x)$ a partir da função $f(x)$, quando essa derivada existe, isto é, quando $f(x)$ é diferenciável. No entanto, quando vamos realizar o processo inverso (integração), a integral $f(x)$ da função $f'(x)$ não bem definida, tanto que é denominada integral indefinida. Veja o exemplo 4.1 para compreender melhor o motivo dessa denominação.

EXEMPLO 4.1

Considere a função $f(x) = x^2 + 3x - 5$. Sua derivada é $f'(x) = 2x + 3$. Agora, imagine-se tentando determinar a função original $f(x)$ a partir de sua derivada $f'(x)$. Não é difícil perceber que "2x" é a derivada de "x^2" e que "3" é a derivada de "3x". Mas, quando derivamos um constante, como "–5", por exemplo, o resultado é sempre zero (seja qual for a constante). Portanto, qualquer outra função que tenha a forma $f(x) = x^2 + 3x + C$, sendo C uma constante arbitrária, tem como derivada $f'(x) = 2x + 3$. Costumamos dizer, nesse caso, que $f(x) = x^2 + 3x + C$ é uma antiderivada de $f(x)$.

A partir de agora, vamos denotar por $F(x)$ a antiderivada de $f(x)$.

CONCEITO

Definição de Antiderivada

Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo I, dizemos que $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x)$$

para todo e qualquer x em I.

EXEMPLO 4.2

Encontre a antiderivada geral de $f(x) = 2$.

No Capítulo 2, vimos que a derivada de uma função da forma "$c \cdot x$", em que c é uma constante, é igual a "c", pois,

$$\frac{d(cx)}{dx} = c\frac{dx}{dx} = c$$

Então, podemos concluir que $F(x) = 2x$ é uma antiderivada de $f(x) = 2$. Para obter outras antiderivadas dessa função, basta somar qualquer constante à $F(x) = 2x$. As funções seguintes também são antiderivadas de $f(x) = 2$:

$$F(x) = 2x + 5$$

$$F(x) = \frac{7}{2} + 2x$$

$$F(x) = 2x - 1$$

Podemos escrever a antiderivada geral d e $f(x) = 2$ na forma:

$$F(x) = 2x + C$$

em que C é uma constante.

EXEMPLO 4.3

Encontre a forma geral da antiderivada de $f(x) = \text{sen } x$.

Uma das regras de derivação que vimos é

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\text{sen } x$$

Portanto, a função cuja derivada é igual a "sen x" é $F(x) = -\cos x$. Sendo assim, a antiderivada geral de $f(x) = \text{sen } x$ é:

$$F(x) = -\cos x + C$$

com C constante.

EXEMPLO 4.4

Determine a antiderivada geral de $f(x) = e^{-3x}$.

Derivadas de funções do tipo "e^{cx}" são sempre iguais ao produto de uma constante com "e^{cx}", com c constante. Vamos "experimentar" uma função da forma $F(x) = ke^{-3x}$ e determinar a sua derivada:

$$F'(x) = -3ke^{-3x}$$

Note que se tomarmos $-3k = 1$, que equivale a $k = -\frac{1}{3}$, a derivada em (4.1) iguala-se a $f(x) = e^{-3x}$. Logo, podemos considerar que

$$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

é uma antiderivada de $f(x) = e^{-3x}$, pois $F'(x) = f(x)$.

Sendo assim, a antiderivada geral de $f(x) = e^{-3x}$ é:

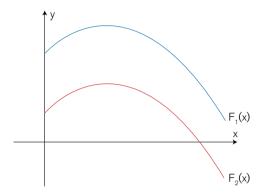
$$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

Se duas funções $F_1(x)$ e $F_2(x)$ têm derivadas iguais, então concluímos que:

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

ou

$$F_1(x) - F_2(x) = C$$

Isto quer dizer que elas se diferem por uma constante, ou seja, seus gráficos têm comportamentos idênticos no que diz respeito às suas respectivas taxas de variação, como ilustrado na figura 4.1.

Considere uma função f(x) cujas antiderivadas tenham a forma F(x) + C. A notação utilizada, nesse caso, é

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

que é conhecida como integral indefinida de f(x) e representa o processo de antidiferenciação de f(x).

O sinal "$\int$ " é conhecido como sinal da integral. A função f(x) é denominada integrando e a constante C é a constante de integração. Já termo "dx" serve para identificar em relação à qual variável deve ocorrer o processo de antidiferenciação. Por enquanto, estamos trabalhando com funções que são expressas em relação a uma única variável. No entanto, no processo de antidiferenciação de funções de mais que uma variável (que é assunto do Cálculo Diferencial e Integral II), é necessário indicar em relação a qual delas tal processo será relizado.

A expressão

$$\int f(x)\,dx$$

é conhecida por integral indefinida de f(x) e denota a família de todas as antiderivadas de f(x).

Como o processo de integração é inverso ao de derivação, em muitos casos, conseguimos determinar a integral indefinida de uma função a partir de uma regra de derivação. Considere, por exemplo, a derivada da expressão "x^2", que é "2x". A regra utilizada nesse processo de derivação é

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

De fato, considerando que n = 2, temos:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x^{2-1} = 2x$$

Agora, para chegarmos a expressão "x^2", a partir da expressão "2x", podemos fazer

$$\begin{aligned} \int 2x \; dx &= 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + C \\ &= 2\frac{x^2}{2} + C \\ &= x^2 + C \end{aligned}$$

Note que, na aplicação da regra de derivação em (4.2), o expoente da expressão "x^2" aparece multiplicando a variável x e o novo expoente é obtido subtraindo-se "1" do expoente "2". No processo inverso, portanto, o expoente deve ser acrescido de uma unidade e esse novo expoente aparece dividindo a expressão. Podemos, então, estabelecer a seguinte regra de integração:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Para provar sua validade, vamos derivar (em relação a x) a expressão

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

e mostrar que ela será igual a " x^n ":

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)}{dx} &= \frac{1}{n+1}\frac{d\left(x^{n+1}\right)}{dx} \\ &= \frac{n+1}{n+1}x^{n+1-1} \\ &= x^n \end{aligned}$$

4.2 Integrais imediatas e integração por substituição

Note que é possível determinar algumas integrais apenas conhecendo as regras de derivação. Dizemos que são integrais imediatas, pois, resultam apenas da aplicação de regras elementares e não necessitam do uso de nenhum artifício algébrico complementar.

A seguir, são apresentadas algumas dessas regras elementares de integração. Cada uma delas pode ser demonstrada a partir da derivação da expressão à direita até chegar à função que compõe o integrando, isto é, a verificação da validade da regra pode ser feita através do processo inverso à integração que é o de derivação. Portanto, sugere-se uma consulta às regras de derivação apresentadas no Capítulo 2 para compreender melhor as regras de integração a seguir.

Regras elementares de integração

Considere a, n, k e C constantes, com a > 0.

I. $\int k \ dx = kx + C$

II. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, para todo n real diferente de − 1.

III. $\int \text{sen}\, x \ dx = -\cos x + C$

IV. $\int \cos x \ dx = \text{sen}\, x + C$

V. $\int \sec^2 x \ dx = \text{tg}\, x + C$

VI. $\int \csc^2 x \ dx = -\text{cotg}\, x + C$

VII. $\int \csc x \cdot \text{cotg}\, x \ dx = -\csc x + C$

VIII. $\int \sec x \cdot \text{tg}\, x \ dx = \sec x + C$

IX. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\text{cotg}\, x + C$

X. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \text{arc sen}\, x + C$

XI. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\text{arc cos}\, x + C$

XII. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \text{arc tg}\, x + C$

XIII. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\text{arc csc}\,x + C$

XIV. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{arc sec}\,x + C$

XV. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\text{ arc cotg}\,x + C$

XVI. $\int a^x \cdot \ln a\;\; dx = a^x + C$

XVII. $\int e^x\,dx = e^x + C$

XVIII. $\int \frac{1}{x \cdot \ln a}\,dx = \log_a |x| + C$

XIX. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Além das regras apresentadas, podemos estabelecer mais algumas, a partir das regras de derivação. Lembre-se, por exemplo, que dadas duas funções deriváveis, f(x)e g(x), a derivada da soma ou subtração $f(x) \pm g(x)$ é igual à soma ou subtração de suas derivadas, isto é,

$$\frac{d[f(x) \pm g(x)]}{dx} = \frac{d[f(x)]}{dx} \pm \frac{d[g(x)]}{dx}$$

Daí, podemos concluir que a integral de uma soma ou subtração de funções é igual à soma ou subtração de suas integrais:

$$\int [f(x) \pm g(x)\;]dx = \int f(x)\;\; dx \pm \int g(x)\;\; dx$$

Da mesma forma que a derivada do produto e a derivada do quociente de duas funções não são iguais, respectivamente, ao produto das derivadas e ao quociente das derivadas de suas funções, a integral de um produto de funções não é igual ao produto de suas integrais e, também, a integral de um quociente de duas funções não é igual ao quociente de suas integrais.

$$\int f(x) \cdot g(x)dx \neq \int f(x)\;\; dx \cdot \int g(x)\;\; dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)\;\; dx}{\int g(x)\;\; dx}$$

O caso em que integramos uma função na forma "$k \cdot f(x)$", em que k é constante, é semelhante ao da derivada desse tipo de função. A derivada do produto de uma constante com uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função f(x), isto é,

$$\frac{d\left[kf(x)\right]}{dx} = k\frac{d\left[f(x)\right]}{dx}$$

No caso da integral de "$k \cdot f(x)$", o resultado será o produto de k pela integral de f(x), como se segue:

$$\int k \cdot f(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$$

O próximo exemplo apresenta alguns casos de funções cujas integrais podem ser obtidas através da aplicação das regras de integração de forma imediata.

EXEMPLO 4.5

Em cada um dos casos seguintes, integre a função dada. Fica como sugestão que você, após a integração, derive o resultado (utilizando as regras de derivação abordadas no Capítulo 2) para obter a função do integrando.

f) $\int x^3\, dx$

g) $\int (5x + x^2)\, dx$

h) $\int \frac{3}{x}\, dx$

i) $\int -\frac{7}{x^2}\, dx$

j) $\int (5 + \operatorname{sen} x)\, dx$

k) $\int \sqrt[4]{x}\ dx$

l) $\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\csc x}\, dx$

m) $\int (e^x - \cos x)\, dx$

Resoluções

a) Considerando a regra (II) de integração e substituindo n por 3, temos:

$$\int x^3\, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

b) Considerando que a integral da soma de duas (ou mais funções) é igual à soma de suas integrais e que a integral do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela integral da função, então podemos escrever:

$$\begin{aligned}\int (5x + x^2)\,dx &= \int 5x\ dx + \int x^2\,dx \\ &= 5\int x\ dx + \int x^2\,dx\end{aligned}$$

Aplicando, a regra (II) nas integrais acima, chegamos ao resultado desejado:

$$\begin{aligned}\int (5x + x^2)\,dx &= 5\frac{x^2}{2} + C_1 + \frac{x^3}{3} + C_2 \\ &= \frac{5x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_1 + C_2\end{aligned}$$

Como C_1 e C_2 são constantes, podemos substitui-las, simplesmente, por C:

$$\int (5x + x^2)\,dx = \frac{5x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$

Para agilizar a determinação de integrais, como no caso do item (b) do exemplo 4.5, não há necessidade de inserir várias constantes (uma para cada parcela que é integrada), pois, ao final do processo de integração, todas as constantes existentes na expressão serão substituídas por uma única constante. Veja que no exemplo mencionado, ao final, substituímos C1 + C2 por C.

c) Na resolução a seguir são aplicadas a propriedade (4.4) à regra de integração (XIX):

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x}\,dx &= 3\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= 3\ln|x| + C\end{aligned}$$

d) Na resolução a seguir, são aplicadas a regra (II) de integração e a propriedade (4.4):

$$\begin{aligned}\int -\frac{7}{x^2}\,dx &= -7\int \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= -7\int x^{-2}\,dx \\ &= -7\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C\end{aligned}$$

$$= -7\frac{x^{-1}}{-1} + C$$
$$= \frac{7}{x} + C$$

e) A resolução a seguir utiliza-se da igualdade em (4.3) e das regras de integração (I) e (III):

$$\int (5 + \text{sen } x)dx = \int 5 \ dx + \int \text{sen } x \ dx$$
$$= 5x + (-\cos x)$$
$$= 5x - \cos x$$

f) Para integrar uma raiz, como ocorre neste item, primeiro escreva-a na forma de potência. Em seguida, aplique a regra de integração (II), como mostrado a seguir:

$$\int \sqrt[4]{x} \ dx = \int x^{\frac{1}{4}} \ dx$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C$$
$$= \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C$$
$$= \frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5} + C$$
$$= \frac{4x \ \sqrt[4]{x}}{5} + C$$

g) Agora, vamos utilizar as igualdades trigonométricas para simplificar o integrando e, em seguida, aplicar a regra de integração (IV):

$$\int \frac{\text{cotg } x}{\csc x} dx = \int \frac{\frac{\cos x}{\text{sen } x}}{\frac{1}{\text{sen } x}} dx$$
$$= \int \frac{\cos x \cdot \text{sen } x}{\text{sen } x} dx$$
$$= \int \cos x \ dx$$
$$= \text{sen } x + C$$

h) A resolução a seguir utiliza-se da propriedade (4.3) e das regras de integração (IV) e (XVII):

$$\int (e^x - \cos x) dx = \int (e^x - \cos x) dx$$
$$= \int e^x \, dx - \int \cos x \ dx$$
$$= e^x - \text{sen } x + C$$

A aplicação das regras de integração de forma imediata é a primeira opção de resolução de uma integral. Muitas vezes, essa aplicação não é assim tão imediata, pois requer uma transformação algébrica, como aconteceu nos itens d, f e g do exemplo 4.5. Mas, é preciso, num primeiro momento, tentar reconhecer a forma do integrando e compará-la com as regras apresentadas.

Entretanto, há diversos casos em que não é possível a aplicação de tais regras sem a utilização de outros artifícios. O processo de integração, geralmente, é mais complexo que o de derivação. Tanto que teremos um capítulo (o Capítulo 6) destinado somente a apresentar algumas técnicas de integração. Por enquanto, vamos trabalhar com integrais cujas resoluções são mais simples, que podem ser resolvidas praticamente com a utilização direta das regras (como as que já vimos) ou aplicando algumas substituições algébricas antes de utilizá-las, como as que veremos, a partir de agora, até o final desta seção. Utilizaremos o chamado Método da Substituição para resolução de integrais. Vamos apresentá-lo nos próximos exemplos.

EXEMPLO 4.6

Vamos calcular a integral $\int \sqrt{x+5}\ dx$.

A função $f(x)=\sqrt{x+5}$ do integrando pode ser escrita, na forma composta, como

$$\begin{cases} f = u^{\frac{1}{2}} \\ u = x+5 \end{cases}$$

Podemos, então, escrever

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$$

Considerando as igualdades em (4.5) e (4.6), podemos reescrever a integral na forma:

$$\int \sqrt{x+5}\ dx = \int u^{\frac{1}{2}}\ du$$

Como

$$\int u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2u\sqrt{u}}{3} + C$$

e sabendo que $u = x + 5$, podemos, então concluir que

$$\int \sqrt{x+5}\ dx = \frac{2(x+5)\sqrt{x+5}}{3} + C$$

$$= \frac{(2x+10)\sqrt{x+5}}{3} + C$$

Você viu que conseguimos escrever a integral em uma forma conhecida através da substituição de $\sqrt{x+5}$ pela variável auxiliar u. Esse é o objetivo do método da substituição para a resolução de integrais. Veja sua definição a seguir.

Definição – método da substituição

Seja F(x) uma antiderivada de f(x). Então, a integral de uma função da forma $f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ é dada por

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x) dx = F\left(g(x)\right) + C$$

Considerando $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, então a expressão (4.7) pode ser reescrita na forma

$$\int fu\ \ du = F(u) + C$$

Vamos a mais um exemplo de resolução de integral pelo método da substituição.

EXEMPLO 4.7

Resolva a integral $\int (3x^2 + 7)^4 x\, dx$.

Vamos considerar $u = 3x^2 + 7$. Sendo assim,

$$\frac{du}{dx} = 6x \Rightarrow du = 6xdx$$

Note que, para realizar a substituição, é preciso dividir a expressão por 6, que equivale à multiplicá-la por $\frac{1}{6}$. Portanto,

$$xdx = \frac{1}{6}du$$

Daí, podemos efetuar a substituição e resolver a integral, como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned}\int (3x^2+7)^4 x\,dx &= \int u^4 \cdot \frac{1}{6}du \\ &= \frac{1}{6}\int u^4\,du \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}+C \\ &= \frac{u^5}{30}+C\end{aligned}$$

Como $u = 3x^2 + 7$, então podemos concluir que:

$$\int (3x^2+7)^4 x\,dx = \frac{(3x^2+7)^5}{30}+C$$

Vamos a mais um exemplo.

EXEMPLO 4.8

Utilizando o método da substituição, vamos determinar a integral

$$\int \cos(3x)\,dx$$

Tomando $u = 3x$, temos $du = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}du$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)\,dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{3}du \\ &= \frac{1}{3}\int \cos u\,du \\ &= \frac{1}{3}\ \text{sen}\ u + C.\end{aligned}$$

Como $u = 3x$, então

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\ \text{sen}\ (3x) + C.$$

O próximo exemplo apresenta mais um caso de integração por substituição, agora, envolvendo uma função na forma de quociente.

EXEMPLO 4.9

Calcule $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-5}dx$.

Nos exemplos anteriores, vimos que, ao se escolher a substituição $u = f(x)$ a ser feita, a derivada u' deve ser tal que contenha os demais termos do integrando para que seja possível reescrever a integral apenas na variável u. Veja o que acontece nesse caso. Se escolhermos a substituição $u = x^3 + 3x - 5$, note que, a partir de sua derivada, é possível fazer "surgir" o restante do integrando, mesmo que apareça uma constante multiplicando ou dividindo os demais termos. Isso não será problema, pois é possível "retirar" essa constante do integrando. Veja como, a seguir.

Derivando u e escrevendo a expressão resultante na forma fatorada, temos:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= 3x^2 + 3 \\ &= 3(x^2+1).\end{aligned}$$

Agora, veja que é possível, a partir da derivada acima, efetuar a substituição do restante do integrando, fazendo com que, nele, só haja a variável u. Para isso, é preciso estabelecer, a partir da derivada acima, uma expressão em u que substitua "$(x^2+1)dx$". Isso não é difícil, pois precisamos apenas isolar esse termo como mostrado a seguir:

$$\frac{du}{dx} = 3(x^2+1)$$

$$du = 3(x^2+1)dx$$

$$(x^2+1)dx = \frac{1}{3}du$$

Portanto, voltando à integral, fazendo as devidas substituições e resolvendo-a através das regras elementares, temos:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-5}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{3}\,du$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \frac{1}{3}\ln|u| + C$$

Como $u = x^3 + 3x - 5$, então:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-5}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x-5\right| + C$$

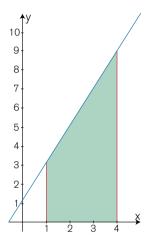
Através da aplicação imediata das regras de integração e da utilização do método da substituição é possível calcular inúmeras integrais. Como já dito, há outras técnicas que serão estudadas mais adiante, mas com o conhecimento que você construiu até aqui sobre o assunto já é possível aplicá-lo em um dos tópicos mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral, que trata do cálculo de áreas sob o gráfico de funções. Isso só é possível graças à Integral Definida, que é tema da próxima seção.

4.3 Integrais definidas e o teorema fundamental do cálculo

No Cálculo Diferencial e Integral há dois tipos de problemas que são fundamentais. Um deles é determinar a taxa de variação de uma curva (função) em um ponto. Isso você já estudou no Capítulo 2. O outro é determinar a área de uma região sob uma curva. O segundo tipo de problema é resolvido com a utilização de integrais, mais especificamente de integrais definidas, que é o assunto que trataremos nessa seção.

Para uma maior e mais fácil compreensão do conceito e aplicação de uma integral definida, vamos começar com um exemplo de determinação da área sob o gráfico de uma função cuja representação é uma reta. Em seguida, exemplos gradativamente mais complexos serão apresentados para que os conceitos e processos vistos possam ser ampliados e, de certa forma, generalizados.

EXEMPLO 4.10

Vamos determinar a área da região sob o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$, limitada lateralmente pelas retas $x = 1$ e $x = 4$ e inferiormente pelo eixo x, conforme mostra a figura 4.2. É importante considerar que a função f(x) é não negativa para todo x no intervalo (1,4).

Nesse caso, pode-se perceber que a determinação da área pode ser feita através de cálculos simples, pois a região tem a forma de um trapézio. A fórmula que fornece a área do trapézio é:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

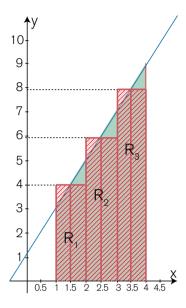
em que B é a medida da base maior, b é a medida da base menor e h é a medida da altura.

Portanto, nesse exemplo, a área pode ser dada por:

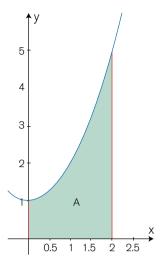
$$A = \frac{(9 + 3)3}{2} = 18$$

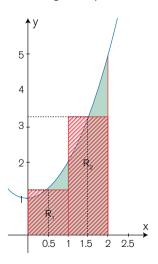
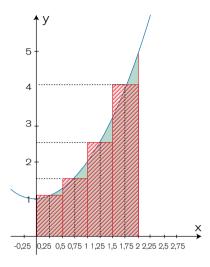
O problema é que nem sempre o gráfico da função que irá limitar a região é uma reta. Como proceder se o gráfico da função for uma curva?

Vamos utilizar este exemplo (pela sua simplicidade) para começar a explicar e justificar um processo de determinação de área sob gráficos de funções (de qualquer tipo), utilizando o processo de integração.

Comecemos aproximando a área desse trapézio através da soma das áres de retângulos cujas bases inferiores situam-se no eixo x e cujos pontos médios das bases superiores coincidem com o gráfico da função $f(x)=2x+1$, conforme ilustrado na figura 4.3.

As áreas dos retângulos R_1, R_2 e R_3 são, respectivamente, 4, 6 e 8. Se as somarmos, o resultado será 18, valor igual ao que obtivemos através da fórmula da área do trapézio. Chegamos a um resultado exatamente igual ao da área da região sob o gráfico porque, como é possível observar na Figura 4.3, as partes dos retângulos que estão fora da região cuja área queremos determinar são "compensadas" pelas áreas que a menos nessa região. Mas o que acontece quando não ocorre exatamente esse tipo de compensação. Vamos ver no próximo exemplo.

EXEMPLO 4.11

Como podemos determinar a área sob o gráfico da função $f(x)=2x+1$, limitada lateralmente pelas retas 0 e 2 e inferiormente pelo eixo x (conforme mostrada na figura 4.4)?

Nosso problema agora tornou-se um pouco mais complexo, pois, superiormente, a região cuja área queremos determinar é uma curva e não uma reta. Mas, vamos começar utilizando o mesmo recurso do exemplo 4.10 para estimar a área que queremos. Inicialmente, considere a estimativa utilizando dois retângulos R_1 e R_2, conforme ilustrado na figura 4.5. Ambos têm base de medida igual a 1 (tais bases estão sobre o eixo x) e altura que é igual ao valor da função f(x) calculada para cada um dos pontos médios das respectivas bases desses retângulos. Ressalte-se, aqui também, que a função f(x) é não negativa para todo x no intervalo em que a área está sendo considerada.

As áreas dos retângulos R_1 e R_2 são, respectivamente, dadas por $(1-0)\cdot f(0,5)=1,25$ e $(2-1)\cdot f(1,5)=3,25$. Portanto, a soma das áreas dos retângulos é igual a 4,5. Essa é uma primeira aproximação para a área sob o gráfico que estamos querendo determinar.

Mas, note que podemos melhorar essa estimativa, utilizando mais retângulos. Veja como na figura 4.6.

As áreas dos retângulos R_1 a R_4 são apresentadas na Tabela 4.1.

RETÂNGULO	MEDIDA DA BASE	MEDIDA DA ALTURA	ÁREA
R1	0,5 – 0 = 0,5	$f(0{,}25)=1{,}0625$	$0{,}5\cdot 1{,}0625=0{,}53125$
R2	1 – 0,5 = 0,5	$f(0{,}75)=1{,}5625$	$0{,}5\cdot 1{,}5625=0{,}78125$
R3	1,5 – 1 = 0,5	$f(1{,}25)=2{,}5625$	$0{,}5\cdot 2{,}5625=1{,}28125$
R4	2 – 1,5 = 0,5	$f(1{,}75)=4{,}0625$	$0{,}5\cdot 4{,}0625=2{,}03125$
Soma:			4,625

O valor 4,625 é uma aproximação mais precisa da área exata sob o gráfico da função que queremos determinar. Se realizarmos esse tipo de aproximação considerando a divisão em cada vez mais retângulos, nos aproximaremos mais e mais do valor exato da área.

Vamos, então, considerar, de forma geral, a divisão em n retângulos cujas bases têm medida dada por Δx e a medida da altura de cada um é dada por $f(x_i)\geq 0$, num intervalo real [a,b], em que x_i é o ponto médio do retângulo i, com $i=1,\ldots,n$. Dessa forma, a área A sob o gráfico será aproximada por

$$A\cong f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ldots+f(x_n)\Delta x$$

A soma em (4.8) é conhecida por Soma de Riemann.

À medida que aumentamos a quantidade n de retângulos, chegamos a estimativas cada vez mais próxima do valor exato da área A. Utilizando o conceito de limites, visto no Capítulo 1, podemos concluir que a área A pode ser exatamente obtida através do limite da Soma de Riemann em (4.9), com n tendendo ao infinito:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x\right]$$

O limite da Soma de Riemann apresentado em (4.9), é conhecido por integral definida da função não negativa f(x) no intervalo [a,b]. A notação utilizada para a integral definida da função f(x), no intervalo [a,b] é:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Portanto, área A sob o gráfico da função f(x) e limitada pelos valores x = a e x = b tais que $f(x) \geq 0$ em [a,b] pode ser dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Mas como podemos determinar o valor da integral definida apresentada em (4.10)?

Isso é mostrado no teorema seguinte, conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema fundamental do cálculo

Considere uma função f(x) contínua em no intervalo [a,b]. Seja F(x) uma antiderivada qualquer de f(x). Então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Vamos retornar ao exemplo 4.11 para determinar a área A utilizando a integral definida e o teorema fundamental do cálculo.

Como queremos determinar a área da região sob o gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$, no intervalo [0,2], limitada inferiormente pelo eixo x (e considerando que $f(x) \geq 0$ nesse intervalo), podemos escrever:

$$A = \int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$$

Como a antiderivada geral de $f(x) = x^2 + 1$ é $F(x) = \frac{x^3}{3} + x + C$, então, aplicando o teorema fundamental do cálculo em (4.12), temos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (x^2 + 1)\,dx \\ &= F(2) - F(0) \\ &= \left[\frac{2^3}{3} + 2 + C\right] - \left[\frac{0^3}{3} + 0 + C\right] \\ &= \left[\frac{14}{3} + C\right] - [C] \\ &= \frac{14}{3} + C - C \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Compare o resultado $\frac{14}{3}$, que é aproximadamente 4,667, com as estimativas obtidas no exemplo 4.11. São valores bem próximos.

Quando calculamos a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, em que F(x) é uma antiderivada da função f(x), a constante de integração C surgirá tanto na expressão que define F(a) como na que define F(b). Dessa forma, como teremos que calcular $F(b) - F(a)$, sempre haverá o cancelamento dessa constante. Portanto, no cálculo de uma integral definida podemos simplesmente dispensar o uso da constante de integração, isto é, o processo apresentado para resolver a integral definida em (4.12) pode ser resumido da forma seguinte:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (x^2 + 1)\,dx \\ &= F(2) - F(0) \\ &= \left[\frac{2^3}{3} + 2\right] - \left[\frac{0^3}{3} + 0\right] \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Duas formas bastante utilizadas para representar o cálculo utilizado na determinação da integral definida são

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b$$

e

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

Essa notação será utilizada, a partir de agora, todas as vezes que precisarmos calcular o valor de uma integral definida.

A seguir, são apresentadas algumas propriedades das integrais definidas.

Propriedades da integral definida

Considere as funções f(x) e g(x) contínuas em um intervalo [a,b] e a constante real k .

Então:

I. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

II. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

III. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

IV. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, para todo c do domínio de f(x);

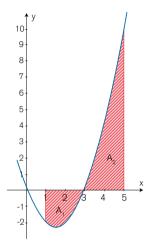
V. $f(x) < 0$, então $\int_a^b f(x)\,dx < 0$

Essas propriedades serão de grande importância nas aplicações que faremos das integrais definidas no cálculo de áreas de figuras planas. A próxima seção apresenta alguns exemplos de tais aplicações.

4.4 Aplicações da integral definida: cálculo de áreas de figuras planas

Na seção anterior, já utilizamos a integral definida para determinar a área da região sob o gráfico de uma função f(x) não negativa em um intervalo de valores de x e limitada lateralmente por tais valores e inferiormente pelo eixo x. Vamos, agora, ver mais alguns exemplos, apresentando situações em que a função pode assumir valores negativos, pelo menos para alguns valores do intervalo considerado, ou aquelas em que a região é delimitada por duas funções, entre outras.

EXEMPLO 4.12

Calcule a área delimitada pela função $f(x) = x^2 - 3x$, entre os valores x = 1 e x = 5 e pelo eixo x.

A figura 4.7 mostra a região cuja área queremos determinar. Ela, na verdade, está dividida em duas sub-regiões cujas áreas denotaremos por A1 e A2.

Como a função f (x) é negativa para valores de x entre 0 e 3, a sua integral definida nesse intervalo, ou em um seu subintervalo, também será negativa. Portanto, a área A1 deverá ser dada por:

$$A_1 = -\int_1^3 (x^2 - 3x)\,dx$$

ou, utilizando a propriedade (III) de integral definida, ela poderá ser obtida através de:

$$A_1 = \int_3^1 (x^2 - 3x)\,dx$$

Já a área A_2 pode ser obtida diretamente através de

$$A_2 = \int_3^5 (x^2 - 3x)\,dx$$

pois, no intervalo (3,5) a função f (x) é positiva. A seguir, estão os cálculos das áreas A_1 e A_2.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_3^1 (x^2 - 3x)\,dx \\
&= \left.\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_3^1 \\
&= \left[\frac{1^3}{3} - \frac{3\cdot 1^2}{2}\right] - \left[\frac{3^3}{3} - \frac{3\cdot 3^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

e

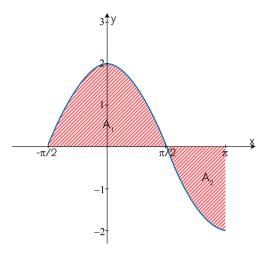
$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_3^5 (x^2 - 3x)\,dx \\
&= \left.\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_3^5 \\
&= \left[\frac{5^3}{3} - \frac{3\cdot 5^2}{2}\right] - \left[\frac{3^3}{3} - \frac{3\cdot 3^2}{2}\right] \\
&= \frac{125}{3} - \frac{75}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}
$$

Somando as áreas A_1 e A_2 obtemos o valor da área A que queremos:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{10}{3} + \frac{26}{3} = 12$$

No exemplo a seguir, será calculada a área sob o gráfico de uma função, considerando uma região em que alguns valores de x são negativos. Esse fato, como veremos, não provoca alteração do sinal da integral definida, como aconteceu no exemplo anterior, isto é, se uma função é positiva para valores de x em um intervalo em que todos os valores de x são negativos, a sua integral definida nesse intervalo também será positiva. De forma semelhante, se nesse intervalo a função é negativa, então sua integral definida também será negativa.

EXEMPLO 4.13

Calcule a área definida pela função $f(x) = 2\cos x$, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

A figura 4.8 mostra a região cuja área queremos determinar. Observe que a função é positiva para valores de x entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Já no intervalo entre $\frac{\pi}{2}$ e π ela é negativa. Portanto a área A, que é igual à soma das áreas A_1 e A_2, é dada por:

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx + \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos x\,dx\right) \\
&= \left[2\text{sen}\,x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[2\text{sen}\,x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \left[2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[2\text{sen}\,(\pi) - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \left[2(1) - 2(-1)\right] - \left[2(0) - 2(1)\right] \\
&= 4 + 2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

No próximo exemplo, veremos como determinar a área de uma região definda entre duas funções.

EXEMPLO 4.14

Calcule a área da região limitada pelas funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$.

Para determinar graficamente a região delimitada pelas duas funções é preciso, além de esboçar seus gráficos, determinar os pontos de intersecção entre as mesmas. Para isso, vamos igualá-las e resolver a equação resultante:

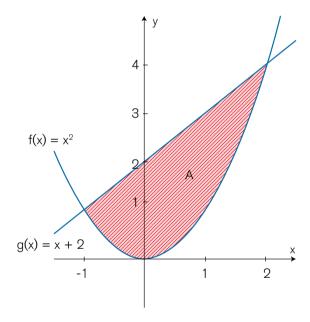
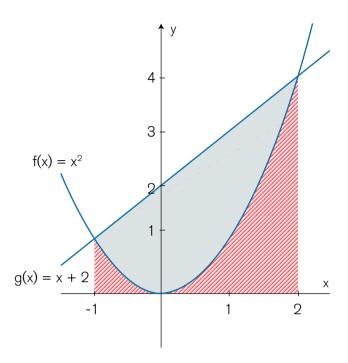
$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_1 = -1 \quad \text{ou} \quad x_2 = 2$$

Temos:

$$f(-1) = g(-1) = 1$$

e

$$f(2) = g(2) = 4$$

Portanto, as funções interceptam-se nos pontos e, como mostra a figura 4.9. Determinar as abscissas x_1 e x_2 dos pontos de intersecção entre as funções é fundamental nesses casos, pois, eles serão os limites da integral definida utilizada na determinação da área.

A área da região em destaque na figura 4.9 pode ser dada pela diferença entre a área da região sob o gráfico da função g (x) = x + 2, entre os valores x = −1 e x = 2 e acima do eixo x e a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, também entre x = −1 e x = 2 e acima do eixo x. Compare a representação da figura 4.9 com a da figura 4.10.

Repare que se subtrairmos a integral definida $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$ de $\int_{-1}^{2} (x+2)\,dx$, obteremos a área desejada. Portanto,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} (x+2)\,dx - \int_{-1}^{2} x^2\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\
&= \left[\left(\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2\cdot(-1)\right)\right] - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right] \\
&= \left[6 + \frac{3}{2}\right] - \left[\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right] \\
&= 4{,}5
\end{aligned}
$$

Vejamos mais um exemplo de cálculo de área de regiões delimitadas por duas funções.

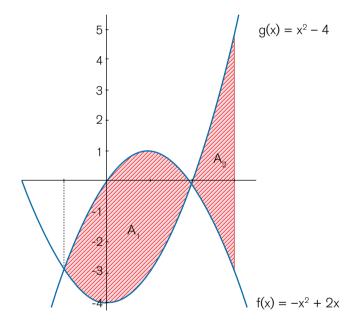
Na resolução acima, também poderíamos ter aplicado a propriedade (II) das integrais definidas. Veremos como realizar esse tipo de procedimento no próximo exemplo.

EXEMPLO 4.15

Calcule a área da região delimitada pelas funções $f(x) = -x^2 + 2x$ e $g(x) = x^2 - 4$ entre os valores x = −1 e x = 3.

As abscissas dos pontos de intersecção são obtidas a partir da resolução da equação seguinte:

$$-x^2 + 2x = x^2 - 4$$
$$-2x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$x_1 = -1 \quad \text{ou} \quad x_1 = 2$$

A região cuja área iremos determinar está representada na figura 4.11.

Vamos obter a área desejada, que denotaremos por A, somando as áreas A1 e A2.Note, que o gráfico da função f(x) está acima do gráfico da função g(x) no intervalo (−1,2) e está abaixo no intervalo (2,3). Portanto, as áreas A1 e A2 serão dadas, respectivamente, por:

$$A_1 = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx - \int_{-1}^{2} g(x)\,dx$$

e

$$A_2 = \int_{2}^{3} g(x)\,dx - \int_{2}^{3} f(x)\,dx$$

Aplicando a propriedade (II) das integrais definidas, podemos reescrever as expressões anteriores das seguintes maneiras:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx - \int_{-1}^{2} g(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2 - 4)\,dx \\
&= \int_{-1}^{2} \left[-x^2 + 2x - (x^2 - 4)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{2} \left[-x^2 + 2x - x^2 + 4\right] dx \\
&= \int_{-1}^{2} \left[-2x^2 + 2x + 4\right] dx
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-1}^{2} \left[-2x^2 + 2x + 4\right] dx \\
&= \left[-2\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} \\
&= \left[-2\frac{2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2\right] - \left[-2\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4 \cdot (-1)\right] \\
&= \left[\frac{-16}{3} + 4 + 8\right] - \left[\frac{2}{3} + 1 - 4\right] \\
&= \left[\frac{20}{3}\right] - \left[-\frac{7}{3}\right] \\
&= 9
\end{aligned}
$$

A seguir os cálculos das áreas A1 e A2.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-1}^{2} \left[-2x^2 + 2x + 4\right] dx \\
&= \left[-2\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} \\
&= \left[-2\frac{2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2\right] - \left[-2\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4 \cdot (-1)\right] \\
&= \left[\frac{-16}{3} + 4 + 8\right] - \left[\frac{2}{3} + 1 - 4\right] \\
&= \left[\frac{20}{3}\right] - \left[-\frac{7}{3}\right] \\
&= 9
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_2^3 \left[2x^2 - 2x - 4\right] dx \\
&= \left[2\frac{x^3}{3} - x^2 - 4x\right]_2^3 \\
&= \left[2\frac{3^3}{3} - 3^2 - 4\cdot 3\right] - \left[2\frac{2^3}{3} - 2^2 - 4\cdot 2\right] \\
&= \left[\frac{54}{3} - 9 - 12\right] - \left[\frac{16}{3} - 4 - 8\right] \\
&= [-3] - \left[-\frac{20}{3}\right] \\
&= \frac{11}{3}
\end{aligned}$$

Logo, a área A que queremos determinar é dada por:

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= 9 + \frac{11}{3} \\
&= \frac{38}{3}
\end{aligned}$$

Nos exemplos apresentados, procuramos explorar os casos semelhantes àqueles com os quais você poderá se deparar na aplicação das integrais definidas, no que diz respeito ao cálculo de áreas de superfícies planas. Logicamente, você irá deparar-se com outros tipos de funções, algumas mais complexas, mas, o importante é compreender como podemos aplicar o conhecimento das integrais definidas em tais tipos de cálculos. A preocupação, aqui, é sempre mostrar as aplicações de forma lógica, sem muito formalismo, para que você não se perca em detalhes que em nada contribuirão para o uso do Cálculo Diferencial e Integral em seu curso.

Várias são aplicações da integral definida em diversas áreas. Mas, sem dúvida, na Física é que se concentra um vasto campo de aplicação desse tema. Uma aplicação em Eletricidade refere-se ao cálculo da potência média em sistemas elétricos. A potência instantânea P de um dispositivo de dois terminais é igual ao produto da corrente elétrica I que passa pelo dispositivo e a diferença de potencial U entre seus terminais, ou seja,

$$P = I \cdot U$$

em que P está em watts, I está em ampères e U em volts. Se considerarmos que I e U podem ser variáveis temporais (funções da variável t que denota tempo), então podemos determinar a potência média Pmédia desenvolvida num intervalo de tempo através da integral definida:

$$P_{\text{média}} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\cdot U(t)\,dt$$

Nas ciências econômicas também há diversas aplicações da integral definida. Um exemplo é o cálculo do valor futuro F de um rendimento a fluxo contínuo de k reais por ano, durante n anos a uma certa taxa i de juros compostos. Ele é dado por

$$F = \int_0^n ke^{i(n-t)}\,dt$$

No próximo capítulo, serão apresentadas mais aplicações das integrais definidas, além dos cálculos de áreas. Calcular volumes a partir do fatiamento de sólidos será um dos temas. Você também estudará sobre o cálculo de volumes de sólidos de formados a partir da rotação de uma superfície em torno de um eixo.

As integrais definidas, além de importantes nos cálculos de áreas (como já vimos) e de volumes (como ainda veremos) também podem ser utilizadas para determinar o comprimento de curvas (funções) em um plano.

5

Aplicações de Integrais Definidas

A aplicação que motivou a definição da integral é o cálculo de áreas de figuras planas, que já vimos na seção 4.4 do capítulo anterior. Mas, a partir desse tipo de procedimento, descobriu-se que é possível também calcular volumes de sólidos que são gerados a partir de superfícies cujas áreas definimos através da utilização da integral definida. Não menos importante que a primeira aplicação da integral definida, o cálculo de volumes de sólidos será apresentado nas duas próximas seções. Na seção 5.3, será apresentada outra aplicação da integral definida que consiste em determinar o comprimento de curvas, que são geradas por funções matemáticas.

5.1 Cálculo de volumes por fatiamento

Para uma melhor e mais clara compreensão do método que será apresentada nesta seção, vamos relembrar o cálculo do volume de um cilindro reto, como exemplo, que é um sólido cujas bases, superior e inferior são circulares e de mesmo tamanho, com superfícies laterais perpendiculares às bases, como mostrado na figura 5.1.

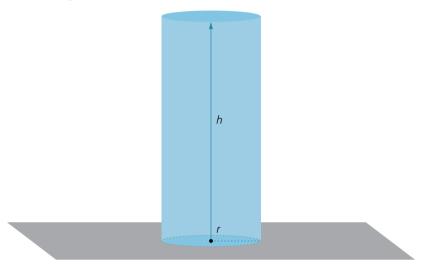



Figura 5.1.

A fórmula do volume V de um cilindro é conhecida e é dada por:

(5.1)

$$V = \pi\ r^2 h$$

em que r é a medida do raio das bases e h é a sua altura.

Agora, vamos dispor esse cilindro de tal forma que suas bases situam-se perpendicularmente ao eixo x. Repare que a sua altura h pode ser expressa por

(5.2)

$$h = b - a$$

Há também, na figura 5.2, duas seções transversais planas e perpendiculares ao eixo x que o interceptam nos valores x1 e x2. A interseção de cada uma dessas seções com o cilindro resultam em um círculo cuja área A pode ser expressa como uma função de x:

(5.3)

$$A(x) = \pi\ r^2$$

Como trata-se de um cilindro, a área A(x) não se altera à medida que mudamos o valor de x, isto é, trata-se de uma função constante. Mais adiante, veremos que em diversos tipos de sólidos a área da interseção de cada seção transversal irá variar à medida que há alteração dos valores considerados no eixo x. Mas, voltando ao cilindro, veja que o seu volume também pode ser obtido integrando-se a função A(x), com x variando de a a b, isto é, o volume V do cilindro pode ser expresso por

(5.4)

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Vamos verificar, considerando as igualdades em (5.3) e (5.4):

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx \\ &= \int_a^b \pi\ r^2\,dx \\ &= \pi\ r^2 x\Big]_a^b \\ &= \pi\ r^2 b - \pi\ r^2 a \\ &= \pi\ r^2 (b-a). \end{aligned}$$

Considerando a igualdade (5.2), então:

$$V = \pi\ r^2 h.$$

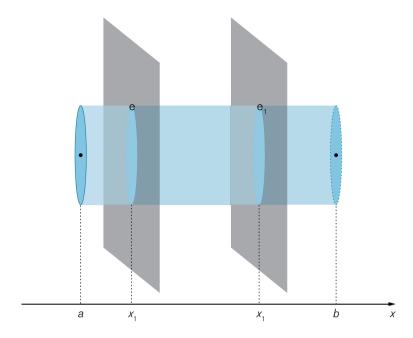



Figura 5.2

Vamos, agora, ver um exemplo em que as áreas das seções alteram-se à medida que há também alteração dos valores correspondentes do eixo x. Para que possamos comprovar, ao final do exemplo, a validade do resultado, vamos considerar o volume de uma pirâmide, que é um sólido cuja área também pode ser determinada de forma direta através da simples aplicação de fórmula.

EXEMPLO 5.1

Vamos calcular a área de uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado 5 cm e sua altura, que mede 9 cm, é perpendicular à sua base. Tal pirâmide, com suas medidas é mostrada na figura 5.3. Como a altura é igual a 9, vamos posicionar o vértice de tal forma que sua projeção ortogonal sobre o eixo x coincida com o valor 0 (zero) e sua base, que é perpendicular ao eixo x, esteja em um plano que intercepta esse eixo no valor 9. Agora, precisamos encontrar a expressão que representa a área de cada seção transversal em relação ao valor de x sobre o qual ela está projetada. A base da pirâmide que tem área igual a 25 cm^2, está projetada sobre o valor 9 do eixo x, e o vértice oposto à base, cuja área é nula, está sobre o valor 0 (zero) do eixo x. Então, podemos concluir que para cada valor x sobre o qual as seções da pirâmide são projetadas, a área da respectiva seção será dada por:

$$A(x) = \left(\frac{5x}{9}\right)^2 \text{ ou } A(x) = \frac{25}{81}x^2$$

Quer dizer que as seções representadas na figura 5.3, projetadas sobre os valores x_1^2 e x_2^2, têm áreas dadas, respectivamente, por

$$\frac{25}{81}x_1^2 \text{ e } \frac{25}{81}x_2^2$$

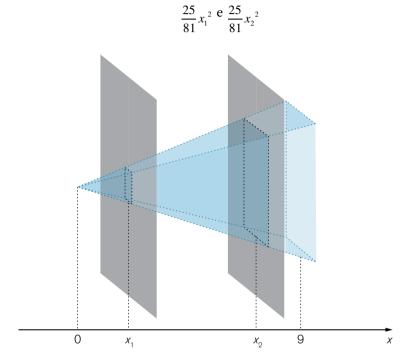



Figura 5.3.

Sendo assim, o volume V da pirâmide pode ser obtido através do cálculo da seguinte integral definida:

$$V = \int_0^9 \frac{25x^2}{81} dx$$
$$= \frac{25x^3}{243}\Big]_0^9$$
$$= \frac{25 \cdot 9^3}{243} - \frac{25 \cdot 0^3}{243}$$
$$= 75 - 0$$
$$= 75 \ \text{cm}^3$$

Vale lembrar que o volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área (x^2) de sua base com sua altura h. Como a base da pirâmide com a qual estamos trabalhando é quadrada, então seu volume pode ser dado pela fórmula:

$$V = \frac{1}{3} x^2 h$$

Substituindo os valores dados no início do exemplo, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 9$$
$$= 75$$

O volume dessa pirâmide é, portanto, igual a 75 cm^3.

Diretrizes para aplicar o método de fatiamento

De forma geral, para calcular o volume de um sólido através do Método de Fatiamento, recomenda-se:

IX. Esboçar o sólido e uma secção transversal que o tipifica para, em seguida, encontrar uma função A(x) que expresse a área desta seção;

X. Posicionar o sólido sobre o eixo x de forma a encontrar os limites de integração a e b;

XI. Determinar o volume do sólido através do cálculo da integral definida $V = \int_a^b A(x) dx$.

Não é necessário que o sólido tenha suas superfícies laterais perpendiculares à base para aplicar o método do fatiamento. Considere dois sólidos, como os da figura 5.4, que têm seções de superfícies exatamente iguais para o mesmo

valor de x. Se, para todo e qualquer valor de x, as seções projetadas, sobre o eixo x, dos dois sólidos tiverem exatamente a mesma área e suas alturas forem iguais, então os dois têm também o mesmo volume. As seções, de ambos os sólidos, projetadas sobre o valor x1 têm a mesma área. O mesmo acontece com as seções projetadas sobre o valor x2. Vale ressaltar que, para valores diferentes de x, não é necessário que as secções tenham a mesma área.

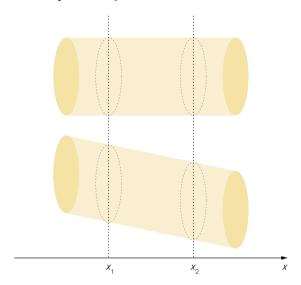



Figura 5.4.

O mesmo processo de cálculo de volumes de sólidos pode ser aplicado em situações em que os sólidos são gerados a partir da rotação em torno de um eixo. Isso é o que você verá na seção a seguir.

5.2 Cálculo de volumes pela rotação em torno de um eixo

O Método de Fatiamento também pode ser aplicado na determinação do volume de ***sólidos de revolução***, que são sólidos cujas formas são obtidas através da revolução (ou rotação) de regiões planas em torno de um eixo como, por exemplo, o eixo x. A Figura 5.5 apresenta um cone formado pela revolução de uma superfície triangular, apoiada sobre o eixo x, em torno do próprio eixo x.

A função f(x) que define a hipotenusa desse triângulo é $f(x)=x$, grafada para valores de x que variam de 0 a 4. Portanto, o cone tem raio da base com medida de 8 cm e sua altura é igual a 4.

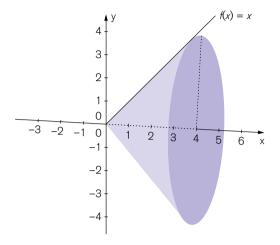



Figura 5.5.

A mesma função, $f(x)=x$, pode determinar outra superfície triangular, mas entre ela e o eixo y, para o intervalo $0 \leq y \leq 4$. Nesse caso, o sólido de revolução (o cone) será determinado a partir da rotação dessa superfície em torno do eixo x, como mostra a figura 5.6.

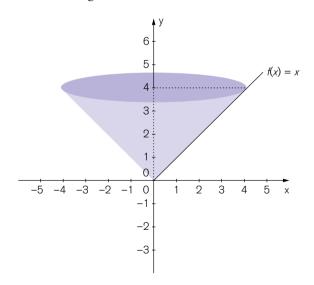



Figura 5.6.

Note que os sólidos obtidos pela revolução da função $f(x)=x$ em torno do eixo x (Figura 5.5) e em torno do eixo y (Figura 5.6) têm as mesmas dimensões e, consequentemente, o mesmo volume. Isso ocorre porque a função $f(x)=x$ é uma função identidade. No entanto, de forma geral, uma mesma função determina sólidos de volumes diferentes quando há mudança do eixo de rotação. Veja os casos, por exemplo, apresentados nos Exemplos 5.4 e 5.5, em que a mesma função, $f(x)=x^2$, gera dois sólidos diferentes quando rotacionada em eixos diferentes.

A questão agora é: como calculamos o volume de um sólido de revolução?

Como nos casos apresentados na seção anterior, em que aplicamos o método do fatiamento, precisamos obter uma função que forneça a área da secção transversal gerada por cada valor de x (quando a rotação é em torno do eixo x). Essa área, portanto, também deve ser dada como uma função da variável x. Vejamos como, nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 5.2

Vamos calcular o volume do sólido gerado pela rotação da superfície gerada pela função $f(x)=x$, para $0 \leq x \leq 4$, em torno do eixo x, como mostra a figura 5.5. Essa superfície é, na verdade, a de um triângulo retângulo com catetos de medidas iguais a 4.

Para cada medida de x, no intervalo $0 \leq x \leq 4$, é possível determinar, no sólido, uma secção transversal cuja área é dada pela função

$$A(x)=\pi \cdot [f(x)]^2 \qquad (5.5)$$

A expressão em (5.5) resulta da aplicação da fórmula da área do círculo $(\pi \cdot r^2)$, considerando que o raio r, para a secção projetada sobre x, é dado por f(x). A Figura 5.7 mostra o sólido em questão com uma secção transversal.

Aplicando o método do fatiamento, o volume V do sólido será dado por

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^4 A(x)\,dx \\
&= \int_0^4 \pi\left[f(x)\right]^2 dx \\
&= \int_0^4 \pi\, x^2\, dx \\
&= \pi\int_0^4 x^2\, dx \\
&= \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\
&= \pi\left[\frac{4^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right] \\
&= \frac{64\pi}{3}
\end{aligned}
$$

O volume do solido gerado é, portanto, igual a $\frac{64\pi}{3}$ unidades cúbicas.

EXEMPLO 5.3

Neste exemplo, vamos calcular o volume do sólido gerado pela rotação da superfície gerada pela função $f(x)=x$, para $0 \le y \le 4$, em torno do eixo y, como mostra a Figura 5.6. Já vimos que é um sólido de mesmo volume que o do exemplo 5.2, pelo fato da função f(x) ser uma função identidade que vai determinar regiões de mesmo formato e mesma área quando projetada sobre o eixo x ou sobre o eixo y. O intuito, aqui, é mostrar que é possível determinar o volume do sólido de revolução quando a rotação da superfície também ocorre sobre o eixo y. Basta efetuar a "troca" da variável, de x para y. De forma geral, essa mudança de variável pode determinar expressões diferentes para a área das secções transversais, o que não ocorre neste exemplo pelo fato citado acima de que as regiões rotacionadas serão de mesmo formato e área. Aqui também temos uma superfície que é, na verdade, a de um triângulo retângulo com catetos de medidas iguais a 4.

Seccionando o sólido de forma perpendicular ao eixo y, como mostra a Figura 5.8, a expressão que fornece a área A de cada secção possível será dada em função da variável y:

$$
A(y) = \pi \cdot \left[g(y)\right]^2 \qquad (5.6)
$$

A função g(y) que aparece em (5.6) é $g(y)=y$ .Sendo assim, o volume V do sólido gerado é dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^4 A(y)\,dy \\
&= \int_0^4 \pi\left[g(y)\right]^2 dy \\
&= \int_0^4 \pi\, y^2\, dy \\
&= \pi \int_0^4 y^2\, dy \\
&= \pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^4 \\
&= \pi \left[\frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] \\
&= \frac{64\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Chegamos, também, ao resultado $\frac{64\pi}{3}$ unidades cúbicas para o volume desejado.

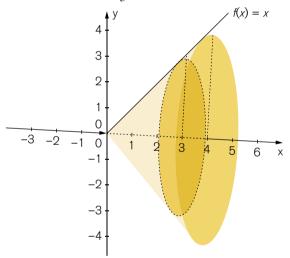



Figura 5.7

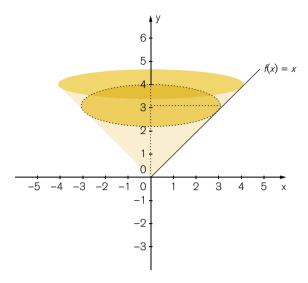



Figura 5.8

Nos dois exemplos a seguir, determinaremos sólidos de revolução diferentes para uma mesma função, em intervalos equivalentes.

EXEMPLO 5.4

Calcule o volume V do sólido gerado pela rotação da função $f(x) = \sqrt{x}$, em torno do eixo x, no intervalo $0 \leq x \leq 4$, conforme ilustrado na figura 5.9.

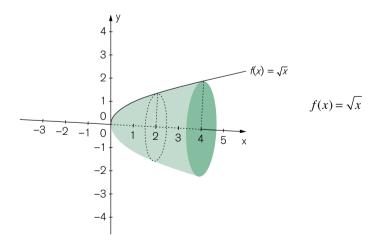



Figura 5.9

As secções transversais são círculos cujas áreas podem ser expressas por:

$$A(x) = \pi \cdot [f(x)]^2 \qquad (5.7)$$

O volume V será, portanto,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(x)\,dx \\ &= \int_0^4 \pi [f(x)]^2\,dx \\ &= \int_0^4 \pi \left(\sqrt{x}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 x\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 \\ &= \pi \left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] \\ &= 8\pi \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

EXEMPLO 5.5

Agora, calcule o volume V do sólido gerado pela rotação da função $f(x) = \sqrt{x}$, em torno do eixo y, no intervalo $0 \le y \le 2$, conforme ilustrado na figura 5.10.

Note que quando $0 \le x \le 4$, temos $0 \le y \le 2$. Portanto, estamos considerando a mesma porção do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$, mas a região considerada está limitada por eixos diferentes. No caso deste exemplo, a rotação ocorrerá em torno do eixo y. Como a superfície considerada é diferente daquela do exemplo anterior, teremos um sólido também diferente do que obtivemos anteriormente.

Devemos considerar, agora, seções transversais paralelas ao eixo y, como a que está representada na figura 5.10. A área genérica A(x) de cada secção transversal será sempre dada por

$$A(y) = \pi \cdot [g(y)]^2$$

em que g(y) é a inversa da função f(x). Para obter g(y), devemos isolar x, na expressão $y = f(x) = \sqrt{x}$, como mostrado a seguir:

$$y = \sqrt{x}$$
$$y^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2$$
$$x = y^2$$

Concluímos, então que $x = g(y) = y^2$ ou, simplesmente, $g(y) = y^2$.

Daí, chegamos ao volume V desejado através do cálculo apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 A(y)\,dy \\ &= \int_0^2 \pi\left[g(y)\right]^2 dy \\ &= \int_0^2 \pi\left[y^2\right]^2 dy \\ &= \pi\int_0^2 y^4\,dy \\ &= \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2 \\ &= \pi\left[\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] \\ &= \frac{32\pi}{5} \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

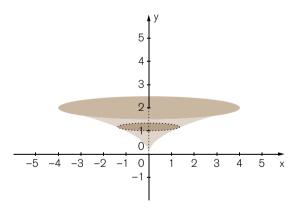



Figura 5.10.

Podemos, também, determinar o volume de um sólido gerado pela rotação de uma superfície limitada por duas funções. Veja como no próximo exemplo.

EXEMPLO 5.6

Determine o volume do sólido de revolução em torno do eixo x gerado pela região delimitada pelas funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 5$, como ilustrado na figura 5.11.

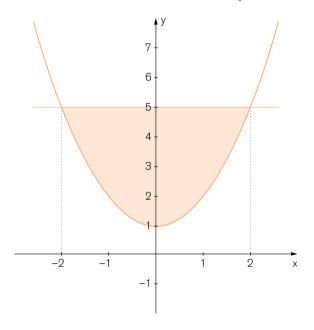



Figura 5.11.

Igualando-se f(x) a g(x), obtemos os valores $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Isso significa as funções interceptam-se nos pontos de abscissas −2 e 2. Esses serão nossos limites de integração, como veremos.

Considerando a rotação dessa região em torno do eixo x, teremos um sólido como o mostrado na figura 5.12.

Note que se destacarmos uma secção transversal perpendicular ao eixo de rotação (nesse caso, o eixo x), ela terá a forma de uma ***arruela*** e não exatamente de um círculo. Portanto, a área deste tipo de secção pode ser dada pela diferença entre as áreas dos círculos de raios, respectivamente, iguais a g(x) e f(x), como mostra a figura 5.13. Então, a área A(x) de cada secção transversal pode ser dada por

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi[g(x)]^2 - \pi[f(x)]^2 \\ &= \pi\{[g(x)]^2 - [f(x)]^2\} \end{aligned}$$

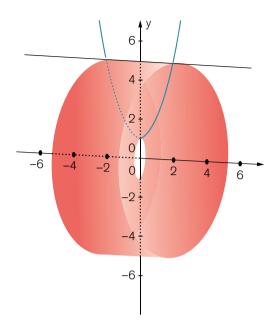
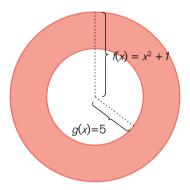



Figura 5.12

Figura 5.12

Integrando A(x) de −2 a 2, obtemos o volume V do sólido. A seguir, o cálculo dessa integral definida:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2} A(x)\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} \pi\left\{\left[g(x)\right]^2 - \left[f(x)\right]^2\right\}dx \\
&= \pi\int_{-2}^{2}\left\{5^2 - \left[x^2+1\right]^2\right\}dx \\
&= \pi\int_{-2}^{2}\left\{25 - x^4 - 2x^2 - 1\right\}dx \\
&= \pi\int_{-2}^{2}\left\{24 - x^4 - 2x^2\right\}dx \\
&= \pi\left[24x - \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{2} \\
&= \pi\left\{\left[24\cdot 2 - \frac{2^5}{5} - \frac{2\cdot 2^3}{3}\right] - \left[24\cdot(-2) - \frac{(-2)^5}{5} - \frac{2\cdot(-2)^3}{3}\right]\right\} \\
&= \frac{1.088}{15}\pi \ \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}
$$

CONEXÃO

Construir sólidos de revolução, assim como vários outros tipos de sólidos, não costuma ser tarefa fácil e exige certa habilidade. No entanto, há um aplicativo que poderá ajuda-lo (a) e muito nesta tarefa: Geogebra. Desenvolvido para auxiliar no ensino de várias áreas da Matemática, ele contém recursos muito úteis na construção de gráficos tridimensionais. Acesse o endereço a seguir para realizar sua instalação gratuitamente: www.geogebra.org .

Para finalizar esta seção, vamos a mais um exemplo, agora envolvendo uma função trigonométrica.

EXEMPLO 5.8

Determine o volume V do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela função $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, o próprio eixo x, no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. O sólido de revolução bem como a função f(x) são representados na figura 5.14.

A seção transversal, já sabemos, é um círculo. Seu raio é igual à f(x). Portanto, a expressão que fornece sua área é:

$$A(x) = \pi\left[f(x)\right]^2$$

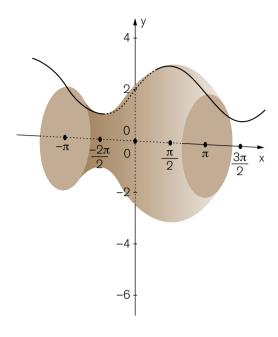



Figura 5.14

O volume V do sólido de revolução é, portanto, dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-\pi}^{\pi} A(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \pi\left[f(x)\right]dx \\
&= \pi\int_{-\pi}^{\pi} \left[2 + \text{ sen } x\right]dx \\
&= \pi\left[2x - \cos x\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi\left\{\left[2\pi - \cos\pi\right] - \left[2(-\pi) - \cos(-\pi)\right]\right\} \\
&= \pi\left\{\left[2\pi + 1\right] - \left[-2\pi + 1\right]\right\} \\
&= \pi\left\{4\pi\right\} \\
&= 4\pi^2 \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}
$$

Exploramos, nesta seção, algumas possibilidades da aplicação das integrais definidas no cálculo de volumes de sólidos. Há uma infinidade de combinações de funções, intervalos e eixos que podem ser combinados para gerar sólidos. Mas, com os instrumentos aqui apresentados é possível determinar os volumes de diversos tipos de sólidos. Basta aplicar o mesmo raciocínio apresentado nos exemplos. Logicamente, não foram apresentados exemplos com funções muito complexas para que o processo pudesse ser compreendido de forma mais

clara. Alguns sólidos, certamente, vão exigir um trabalho mais exaustivo. Mas a compreensão do funcionamento do processo lhe permitirá resolver diversos desses tipos de problemas.

O cálculo de volumes de sólidos tem aplicações práticas em diversos setores da indústria, engenharia civil, arquitetura, química, física, medicina, além da computação gráfica e outras áreas do conhecimento.

5.3 Cálculo do comprimento de curvas planas

Na Física, há diversos exemplos de estudos voltados ao lançamento de objetos, foguetes, ou qualquer outro tipo de móvel em que é importante determinar o deslocamento ocorrido. A trajetória, nesses casos, é modelada por uma função matemática e determinar o deslocamento ocorrido significa calcular o comprimento da curva (gráfico da função) que descreve o movimento. No estudo de ondas, por exemplo, também aplicam-se funções matemáticas para descrevê-las e o comprimento dessas ondas também será dado pelo comprimento das curvas que as representam. Em estudos topográficos é necessário determinar o comprimento das curvas que descrevem o relevo do terreno que está sendo avaliado. Enfim, esses são apenas alguns exemplos em que se o cálculo do comprimento de curvas planas é extremamente importante. Nesta seção, veremos como utilizar o conceito de integral definida de uma função para poder determinar seu comprimento em um intervalo.

Quando temos uma função f(x) definida em um intervalo [a,b], como a função apresentada na figura 5.15, não é difícil definir ou visualizar seu **domínio**, que pode ser identificado, no gráfico, como a projeção ortogonal do gráfico da função sobre o eixo x. Também não é difícil perceber qual é a sua **imagem**, que, de forma semelhante ao domínio, pode ser identificado como a projeção ortogonal do gráfico da função sobre o eixo y. Muitas vezes associamos o comprimento de uma função, num certo intervalo (seu domínio), ao comprimento desse intervalo e não exatamente no comprimento da curva que a representa nesse intervalo. Imagine esticar a “linha” que representa a função f(x) na figura 5.15 e medi-la. Certamente chegaremos a um valor maior do que o comprimento do eixo x entre os valore a e b.

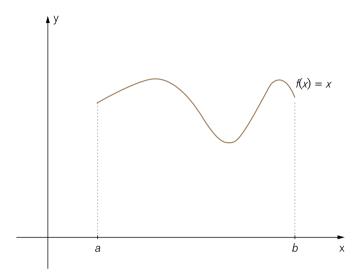



Figura 5.15

Um exemplo bastante utilizado na Física, no estudo das ondas, é o das funções trigonométricas. A figura 5.16 apresenta um período fundamental de uma função seno que representa uma onda. Nesse tipo de aplicação, ela é chamada de **onda senoidal**. O período fundamental é aquele que compreende o exatamente o trecho da função que irá repetir-se nos demais intervalos de seu domínio. No caso da função seno (como também ocorre com a função cosseno), podemos considerar o intervalo [0,2I] como seu período fundamental. É comum se dizer que o comprimento da onda, representada por essa função, é igual a 2I . Na verdade, este é o comprimento do intervalo que representa a projeção ortogonal da curva que representa a onda. Mas, se, novamente aqui, "esticarmos a linha" que representa a função, o seu comprimento não será diferente (será maior) do que 2I ? Certamente que sim.

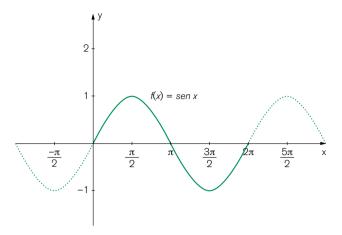



Figura 5.16

A questão agora é, portanto, descobrir uma forma de calcular o comprimento de curvas planas, como as apresentadas nas figuras 5.15 e 5.16.

Para uma melhor compreensão do processo que iremos deduzir, vamos considerar, como exemplo preliminar, uma função cujo gráfico é uma reta. Desse forma, poderemos verificar, ao final, se realizamos nossos cálculos corretamente.

EXEMPLO 5.9

Vamos determinar o comprimento da curva $f(x) = x + 2$, definida no intervalo [1,3], que está representada na figura 5.17. Embora a representação gráfica dessa função, já sabemos, é uma reta, comumente nos referimos a gráficos de funções como curvas, mesmo quando eles têm comportamento retilíneo.

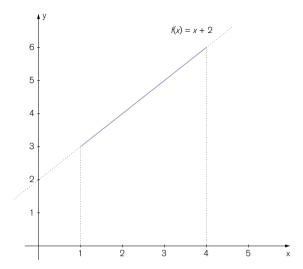



Figura 5.17

Por se tratar de um segmento de reta, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar sua medida. Mas, a ideia aqui é utilizar um recurso semelhante àquele que vimos no Capítulo 4, quando introduzimos o estudo da integral definida. Vamos dividir a região delimitada pelo eixo x, pelas retas x = a e x = b e pela função f(x) em retângulos de mesma base, como mostra a figura 5.18.

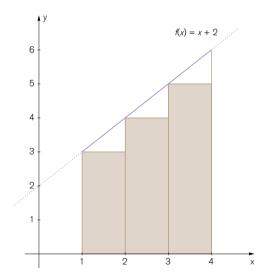



Figura 5.18

Podemos, agora, considerar o triângulo retângulo formado pelo topo de qualquer um desses retângulos e a reta que representa a função. A altura

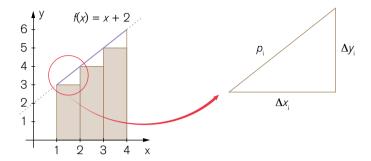



Figura 5.19

Cada setor i do gráfico, com i = 1,2,3, do gráfico da função f(x) terá, portanto, comprimento pi dado por

$$p_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \qquad (5.8)$$

Multiplicando a raiz da expressão em (5.8) por $\frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$ (que é igual a 1), teremos:

$$p_i = \frac{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \cdot \Delta x_i}{\Delta x_i}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \cdot \Delta x_i$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Sendo assim, o comprimento total C do gráfico da função f(x), no intervalo considerado, pode ser dado por

$$C = \sum_{i=1}^{3} p_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Se considerarmos uma quantidade n de retângulos, de forma geral, para obter o comprimento C do gráfico, podemos reescrever a expressão acima na forma:

$$C = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i$$

ou, simplesmente,

$$C = \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i \qquad (5.9)$$

No caso da função $f(x) = x + 2$, a expressão em (5.9) irá fornecer exatamente o comprimento do seu gráfico no intervalo [1,4], por tratar-se de uma reta. Mas, quando o gráfico não é retilíneo, essa expressão irá fornecer apenas uma aproximação da sua real medida. Mas, como resolver esse problema? É possível determinar uma expressão que forneça exatamente o comprimento da curva? Sim, veja o acontece no próximo exemplo.

CONEXÃO

O aplicativo ***graph,*** disponível em http://graph.softonic.com.br/ , permite o traçado de diversos tipos de funções e, entre outras coisas, apresenta o comprimento da curva traçada, além de fornecer, de forma simples, o cálculo de superfícies limitadas por funções. É uma excelente ferramenta auxiliar no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

EXEMPLO 5.10

Vamos considerar o exemplo apresentado no exemplo anterior para nos auxiliar a determinar o comprimento da curva gerada pela função $f(x) = -x^2 + 6x$ também no intervalo [1,4].

Vamos dividir a região abaixo do gráfico em retângulos cujas bases estão apoiadas no eixo x e um de seus vértices superiores coincidem com o gráfico da f(x), como mostra a figura 5.20.

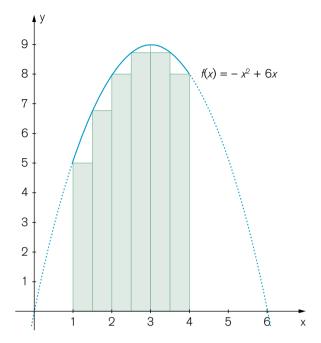



Figura 5.20

Diferente do que aconteceu no exemplo anterior, agora as figuras formadas entre o gráfico e cada um dos retângulos não têm a forma exata de um triângulo retângulo, mas se aproxima dela. Veja, na figura 5.21, que a hipotenusa de cada um dos triângulos formados tem comprimento que se aproxima do respectivo setor do gráfico.

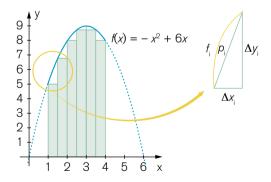



Figura 5.21

Note que cada setor fi do gráfico da função f(x) tem medida próxima da medida do respectivo pi (medida da hipotenusa). Portanto, uma aproximação para a medida C da curva $f(x) = -x^2 + 6x$ no intervalo considerado pode ser dada por

$$. \qquad C \cong \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i \qquad (5.10)$$

A expressão em (5.10) pode ser considerada uma ***soma de Riemann***, como a fórmula (4.8) apresentada no capítulo anterior.

À medida que aumentamos a quantidade n de retângulos, cada medida ***fi*** irá se aproximar da respectiva medida ***pi***. Então, se aumentarmos indefinidamente a quantidade de retângulos (n → η), faremos com que ° xi → 0 e, consequentemente, ***fi*** → ***pi.*** Portanto, podemos concluir que a medida C do comprimento da curva no intervalo considerado será dada (exatamente) por

$$. \qquad C = \lim_{n \to \infty} \left[\sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i \right] \qquad (5.11)$$

Também como visto no capítulo anterior, o limite apresentado em (5.11) é igual à integral definida

$$. \qquad C = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \, dx \qquad (5.12)$$

De forma geral, para o gráfico da função y = f(x) em um intervalo [a,b], o seu comprimento C será dado por:

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \, dx \qquad (5.13)$$

Voltando ao cálculo solicitado neste exemplo, que é o do comprimento da curva $f(x) = -x^2 + 6x$ no intervalo [1,4], temos que desenvolver a fórmula (5.12). Para isso, é preciso, antes, determinar a expressão que representa $\frac{dy}{dx}$. Como $y = f(x) = -x^2 + 6x$, então:

$$. \qquad \frac{dy}{dx} = -2x + 6 \qquad (5.14)$$

Substituindo (5.14) em (5.12), temos:

$$\begin{aligned} C &= \int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{1+(-2x+6)^2}\ dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{4x^2-24x+37}\ dx \end{aligned}$$

A integral acima não pode ser resolvida pela simples aplicação dos métodos vistos até o momento. Isso é comum acontecer no cálculo do comprimento de curvas. A escolha de uma função desse tipo foi para facilitar a compreensão do desenvolvimento do processo de forma mais intuitiva. Você pode, nesses casos, utilizar recursos computacionais, como o aplicativo ***Graph*** já mencionado neste livro para encontrar o resultado, que é

$$C = 6{,}1257$$

A seguir, veremos dois exemplos em que é possível, utilizando os métodos já vistos de cálculo de integrais, determinar o comprimento das curvas dadas.

EXEMPLO 5.11

Determine o comprimento da curva $g(x) = 5\sqrt{x^3}$ no intervalo $0 \le x \le 4$.

Considerando $y = g(x) = 5\sqrt{x^3}$, podemos escrever

$$y = 5x^{\frac{3}{2}}$$

Daí,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Portanto, utilizando a fórmula (5.13) para os valores deste exemplo, temos:

$$C = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{15x^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^2} \; dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{225x}{4}} \; dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{\frac{4 + 225x}{4}} \; dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4 + 225x} \; dx$$

Para resolver a integral $\int \sqrt{4 + 225x} \; dx$, vamos utilizar o método da substituição, considerando $u = 4 + 225x$. Sendo assim, temos:

$$\frac{du}{dx} = 225 \Rightarrow dx = \frac{1}{225} du$$

Portanto,

$$\int \sqrt{4 + 225x} \; dx = \int \sqrt{u} \, \frac{1}{225} \; du$$

$$= \frac{1}{225} \int \sqrt{u} \; du$$

$$= \frac{1}{225} \int \mathrm{u}^{\frac{1}{2}} \; du$$

$$= \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{675} + C$$

$$= \frac{2(4 + 225x)^{\frac{3}{2}}}{675} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{(4 + 225x)^3}}{675} + C$$

Voltando a cálculo de C, temos:

$$C = \frac{1}{2} \left[\frac{2\sqrt{(4 + 225x)^3}}{675} \right]_0^4$$

$$= \frac{1}{675} \left[\sqrt{(4 + 225x)^3} \right]_0^4$$

$$= \frac{1}{675} \left[\sqrt{(4 + 225 \cdot 4)^3} - \sqrt{(4 + 225 \cdot 0)^3} \right]$$

$$\cong 40{,}2551$$

EXEMPLO

Para finalizar, vamos calcular o comprimento da curva $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ no intervalo [4,8]. Temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

Portanto, o comprimento C da curva será dado por

$$\begin{aligned} C &= \int_4^8 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx \\ &= \int_4^8 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\, dx \\ &= \int_4^8 \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\, dx \end{aligned}$$

Note que a expressão $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}$ é um quadrado perfeito. Ela equivale a $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2$. Sendo assim, voltando ao cálculo da integral, temos:

$$\begin{aligned} C &= \int_4^8 \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}}\, dx \\ &= \int_4^8 \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx \\ &= \int_4^8 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{\ln x}{2}\right]_4^8 \\ &= \left[\frac{8^2}{4} + \frac{\ln 8}{2}\right] - \left[\frac{4^2}{4} + \frac{\ln 4}{2}\right] \\ &\cong 12{,}8764 \end{aligned}$$

No próximo capítulo serão abordadas mais técnicas de integração que permitirão a aplicação da técnica de cálculo de curvas (além de outras utilidades) para uma variedade maior de funções.

6

Técnicas de Integração

As aplicações das integrais ocorrem em diversas áreas do conhecimento na modelagem de fenômenos que podem resultar em cálculos de integrais tanto simples como complexas. Os casos mais simples são aqueles em que o integrando (função que será integrada) apresenta forma que pode ser identificada nas regras elementares de integração, permitindo sua resolução de forma imediata. Mas, há casos de aplicações complexas que impedem que o processo de integração ocorra apenas com a aplicação direta das regras (fórmulas) de integração.

Além disso, devemos considerar que derivar uma função, geralmente, é um processo mais simples do que realizar uma integração. Você consegue encontrar a derivada de funções apenas aplicando as regras de derivação. Já o processo de integração nem sempre é direto e realizado apenas com a aplicação de regras. Há diversos casos em que devem ser utilizados alguns recursos e artifícios a mais.

Já vimos, no Capítulo 4, alguns casos de integrais cuja resolução exigia a utilização de uma variável auxiliar para que fossem resolvidas. Nesse tipo de processo, denominada método da substituição, recorremos a um procedimento algébrico que transforma o integrando em uma expressão mais simples de ser integrada. Além de revisar esse método, através de um exemplo, veremos, na primeira seção deste capítulo, alguns outros casos de procedimentos algébricos que têm como objetivo facilitar (e tornar possível) a resolução de certas integrais. Nas demais seções veremos outros métodos de integração (integração por partes e por frações parciais) que são utilizados em diversos modelos de funções, além da utilização da integral no cálculo de limites de formas indeterminadas.

O conhecimento e aplicação das regras elementares de integração, apresentadas no Capítulo 4, serão extremamente importantes na compreensão do conteúdo abordado neste capítulo. Portanto, se você considera que ainda possui muitas dúvidas em tal conteúdo, recomenda-se um estudo mais aprofundado do Capítulo 4 antes de avançar pelos tópicos deste capítulo.

Procedimentos algébricos

Recursos semelhantes aos que utilizamos no método da substituição (seção 4.2) serão também utilizados a partir de agora. Por isso, convém relembrarmos, através de um exemplo, o processo algébrico utilizado em sua aplicação. Ressalte-se que todos os processos algébricos aqui utilizados serão apresentados na forma de exemplos, o que, acredito, facilita a sua compreensão e não prejudica o processo de generalização dos métodos aplicados.

EXEMPLO 6.1

Calcule

$$\int \frac{9x^2 - 15}{\sqrt{x^3 - 5x + 1}} dx$$

Primeiro, vamos fatorar o numerador (o "3" é fator comum) do integrando. Dessa forma, teremos:

$$\int \frac{9x^2 - 15}{\sqrt{x^3 - 5x + 1}} dx = 3\int \frac{3x^2 - 5}{\sqrt{x^3 - 5x + 1}} dx$$

Realizando a substituição $u = x^3 - 5x + 1$, teremos:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 5 \Rightarrow \left(3x^2 - 5\right) dx = du$$

Então, podemos voltar à resolução da integral realizando as substituições necessárias, $u = x^3 - 5x + 1$ e $\left(3x^2 - 5\right) dx = du$, resolvendo a integral resultante:

$$\begin{aligned}
\int \frac{9x^2 - 15}{\sqrt{x^3 - 5x + 1}} dx &= 3\int \frac{3x^2 - 5}{\sqrt{x^3 - 5x + 1}} dx \\
&= 3\int \frac{1}{\sqrt{u}} du \\
&= 3\int u^{-\frac{1}{2}} du \\
&= 3\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= 6\sqrt{u} + C \\
&= 6\sqrt{x^3 - 5x + 1} + C
\end{aligned}$$

No próximo exemplo, veremos como o desenvolvimento de uma expressão na forma de potência pode facilitar o processo de integração.

EXEMPLO 6.2

Calcule

$$\int (\text{cotg } x - \csc x)^2 \, dx$$

Nenhuma das fórmulas de integração apresentadas no Capítulo 4 possui alguma expressão semelhante à do integrando acima. No entanto, se desenvolvermos a potência, veremos que começarão a surgir termos conhecidos. Veja:

$$\int (\text{cotg } x - \csc x)^2 \, dx = \int \text{cotg}^2 \, x - 2\text{cotg } x \csc x + \csc^2 x \;\; dx \qquad (6.1)$$

Já vimos que:

$$\int \csc^2 x \;\; dx = - \text{ cotg } x + C \qquad (6.2)$$

e

$$\int \text{cotg } x \;\; \csc x \;\; dx = -\csc x + C \qquad (6.3)$$

Mas o que fazer com o termo "cotg^2 x"? Há uma identidade trigonométrica que o relaciona com a "csc^2 x":

$$\text{cotg}^2 \, x = \csc^2 x - 1 \qquad (6.4)$$

Portanto, reescrevendo a integral (6.1) considerando a substituição (6.4), temos:

$$\int (\text{cotg } x - \csc x)^2 \, dx = \int \left(\csc^2 x - 1 - 2\text{cotg } x \csc x + \csc^2 x \right) \;\; dx$$

$$= \int \left(2\csc^2 x - 1 - 2\text{cotg } x \csc x \right) \;\; dx \qquad (6.5)$$

Considerando as igualdades (6.2) e (6.3), podemos resolver a integral em (6.5):

$$\begin{aligned}\int(\text{cotg } x-\csc x)^2\,dx &= \int 2\csc^2 x-1-2\text{cotg } x\csc x\;\,dx\\ &= 2\int\csc^2 x\;\,dx-\int 1\;\,dx-2\int\text{cotg } x\csc x\;\,dx\\ &= -2\text{cotg } x-x+2\csc x+C\end{aligned}$$

Neste tipo de recurso, é importante verificar se o desenvolvimento da potência irá levar os termos do integrando a formatos conhecidos, direta ou indiretamente. Pode surgir uma expressão que está presente em alguma regra de integração ou, então, para que isso aconteça, será necessário antes utilizar alguma identidade trigonométrica. A seguir são apresentadas algumas identidades trigonométricas que poderão ser úteis.

Identidades trigonométricas

- $\text{sen}^2\; x+\cos^2\; x=1$
- $\sec^2\; x=1+tg^2 x$
- $\csc^2\; x=1+\text{cotg}^2 x$

Em alguns casos, o integrando possui uma forma que pode ser transformada em outra equivalente e que aparece como resultado em uma das regras de integração. Veja um exemplo a seguir.

EXEMPLO 6.3

Calcule

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx \qquad (6.6)$$

Veja, nas regras de integração, que o formato do integrando acima é semelhante àqueles que aparecem no integrando das integrais cujos resultados são iguais às funções trigonométricas inversas (arc sen, arc cos, arc tg, etc.). Apesar da semelhança, ainda não é possível aplicar nenhuma dessas regras. Mas, podemos utilizar alguns artifícios algébricos para que a

expressão do denominador apresente, por exemplo, o formato "$a^2 - u^2$", o que nos permitiria aplicar a regra:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \text{arc sen}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (6.7)$$

Retomando a integral em (6.6), vamos somar e subtrair o valor 4, no denominador da raiz:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4}} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 4x + 4) - 4}} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2 - 2^2}} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{-\left[-(x+2)^2 + 2^2\right]}} dx \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{2^2 - (x+2)^2}} dx
\end{aligned}$$

Note que se considerarmos $u = x + 2$ e $a = 2$, teremos $du = dx$ e poderemos concluir que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx = -\text{arc sen}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C$$

Uma outra situação em que os procedimentos algébricos podem auxiliar na resolução de integrais ocorre quando a função do integrando é uma fração algébrica em que o grau do numerador é maior ou igual ao grau do denominador (fração imprópria). Nesses casos, geralmente é possível dividir o numerador pelo denominador fazendo surgir como resultado um polinômio e uma fração própria. Veja um caso no exemplo a seguir.

EXEMPLO 6.4

Calcule $\int \frac{4x^2 - 9x}{2x - 1} dx$.

Vamos começar dividindo $4x^2 - 9x$ por $2x - 1$:

$$\begin{array}{ll} 4x^2 - 9x & \underline{|\ 2x - 1} \\ -4x^2 + 2x & 2x - \frac{7}{2} \\ \quad -7x & \\ \quad 7x - \frac{7}{2} & \\ \quad\quad -\frac{7}{2} & \end{array}$$

Podemos, portanto, escrever a função $f(x) = \frac{4x^2 - 9x}{2x - 1}$ na forma $f(x) = 2x - \frac{7}{2} + \frac{-\frac{7}{2}}{2x - 1}$

que, simplificando, pode ser escrita como $f(x) = 2x - \frac{7}{2} - \frac{7}{4x - 2}$. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 9x}{2x - 1} dx &= \int \left(2x - \frac{7}{2} - \frac{7}{4x - 2} \right) dx \\ &= \int 2x \ dx - \int \frac{7}{2} \ dx - \int \frac{7}{4x - 2} \ dx \\ &= 2\int x \ dx - \frac{7}{2}\int dx - 7\int \frac{1}{4x - 2} \ dx \\ &= x^2 - \frac{7x}{2} - 7\ln|4x - 2| + C \end{aligned}$$

A seguir, é apresentado outro recurso em que uma função na forma de fração algébrica é separada em duas ou mais frações. A ideia é de que as novas frações tenham formas que podem ser integradas mais facilmente que a primeira.

EXEMPLO 6.5

Calcule $\int \frac{5x - 3}{\sqrt{9 - 4x^2}} dx$.

A fração $\frac{5x - 3}{\sqrt{9 - 4x^2}}$ pode ser escrita, de forma equivalente, como:

$$\frac{5x}{\sqrt{9 - 4x^2}} - \frac{3}{\sqrt{9 - 4x^2}}$$

Dessa forma, temos:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \int \left[\frac{5x}{\sqrt{9-4x^2}} - \frac{3}{\sqrt{9-4x^2}} \right] dx$$
$$= \int \frac{5x}{\sqrt{9-4x^2}}dx - \int \frac{3}{\sqrt{9-4x^2}}dx$$
$$= 5\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx \qquad (6.8)$$

Agora, precisamos resolver essas duas integrais. A primeira pode ser determinada pelo *método da substituição*. Considere $u = 9-4x^2$. Então,

$$\frac{du}{dx} = -8x \Rightarrow du = -8xdx \Rightarrow xdx = -\frac{1}{8}du$$

Portanto,

$$5\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx = 5\int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)du$$
$$= -\frac{5}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\ du$$
$$= -\frac{5}{8} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1$$
$$= -\frac{5u^{\frac{1}{2}}}{4} + C_1$$
$$= -\frac{5\sqrt{9-4x^2}}{4} + C_1 \qquad (6.9)$$

A segunda integra pode ser resolvida de forma imediata com a aplicação da fórmula de integração da função *arco seno*, mostrada em (6.7), considerando $u = 2x$ e $a = 3$. Dessa forma, temos:

$$3\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx = 3 \text{ arc sen}\frac{2x}{3} + C_2 \qquad (6.10)$$

Considerando $C_1 + C_2 = C$ e substituindo (6.9) e (6.10) em (6.8), temos:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{9-4x^2}}dx = 5\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx$$
$$= -\frac{5\sqrt{9-4x^2}}{4} - 3 \text{ arc sen}\frac{2x}{3} + C$$

A utilização de procedimentos algébricos na resolução de integrais oferece uma infinidade de opções e combinações de recursos. Não há como apresentar todos aqui. A ideia é experimentar, tentar até chegar ao resultado. Lógico que, para isso, é necessário conhecer processos algébricos tais como fatoração e divisão, além da aplicação de diversas identidades na transformação ou simplificação de expressões. Mas, acredito que o que já foi e ainda será apresentado neste livro lhe dará condições de resolver todas as integrais necessárias ao desenvolvimento de conceitos e aplicações em outras disciplinas ou áreas do conhecimento.

Na próxima seção, será apresentado um método de integração muito utilizado nas situações em que o integrando é composto por um produto (ou quociente também) de funções.

6.1 Integração por partes

A **integração por partes** é uma técnica utilizada para integrar alguns tipos de funções na forma de produto

$$f(x) \cdot g(x)$$

em que $f(x)$ é uma função que pode ser derivada repetidamente e $g(x)$ é uma função que pode ser integrada repetidamente, sem dificuldade.

Partiremos da regra de derivação de um produto de funções, que é apresentada a seguir utilizando a notação de diferencial:

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u \qquad (6.11)$$

Integrando ambos os lados da igualdade em (6.11) em relação a x, temos:

$$\int \frac{d(uv)}{dx}dx = \int \frac{du}{dx}v \;\; dx + \int \frac{dv}{dx}u \;\; dx \qquad (6.12)$$

Como

$$\int \frac{d(uv)}{dx}dx = uv$$

$$\int \frac{du}{dx} v \ dx = \int v \ du$$

e

$$\int \frac{dv}{dx} u \ dx = \int u \ dv$$

então podemos reescrever a expressão (6.12) na forma:

$$uv = \int v \ du + \int u \ dv \qquad (6.13)$$

Agora, isolamos $\int u \ dv$ na expressão (6.13), obtendo:

$$\int u \ dv = uv - \int v \ du \qquad (6.14)$$

Esta é a fórmula que utilizaremos na ***integração por partes***. Com ela conseguimos obter a integral $\int u \ dv$ a partir da integral $\int v \ du$.

O exemplo a seguir mostra como podemos aplicar a técnica de *integração por partes* utilizando a fórmula (6.14).

EXEMPLO 6.6

Calcule a integral indefinida

$$\int xe^x \, dx \qquad (6.15)$$

É comum, nesse tipo de integração, surgir a dúvida sobre qual deve ser a substituição a ser feita. Não se preocupe se você não conseguir reconhecer, de imediato, quais expressões serão substituídas, respectivamente, por u e por v. Experimentar, muitas vezes, faz parte do processo de integração. Portanto, experimento, realize tentativas e veja se conseguiu alcançar o resultado esperado. Muitas vezes, tais tentativas o levarão inclusive a deduzir que o método não é aplicável naquele tipo de situação. Com o tempo você perceberá que a prática nesse tipo de resolução o fará perceber mais rapidamente quais devem ser as substituições necessárias.

Vamos utilizar esse exemplo para mostrar também como podemos realizar tentativas que podem não dar certo.

Se escolhermos as substituições

$$u = e^x \text{ e } dv = x\ dx\ ,$$

teremos:

$$du = e^x dx \text{ e } v = \frac{x^2}{2}\ .$$

Note que, para obter a expressão que fornece v, houve a necessidade de calcular uma integral indefinida e a constante de integração não foi incluída. Aqui não há necessidade disso, pois, no final do processo da integração por partes, surgirá uma constante que pode ser considerada a soma das constantes de integração.

Voltando às substituições, vamos agora reescrever a integral em (6.15) considerando as substituições escolhidas:

$$\int xe^x\ dx = e^x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x\, dx \qquad (6.16)$$

Observe que em (6.16) surgiu uma integral ainda mais complexa do que a que tínhamos em (6.15), o que nos forçaria a tentar uma nova integração por partes. Isso será necessário em muitos casos, mas, neste caso, podemos tentar uma outra substituição com o intuito de obter uma integral mais simples que a primeira.

Vamos, então considerar as substituições

$$u = x \text{ e } dv = e^x\ dx\ .$$

Sendo assim, teremos:

$$du = dx \text{ e } v = e^x\ .$$

Substituindo em (6.15), será possível calcular a integral, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}\int u\ dv &= uv - \int v\ du \\ &= xe^x - \int e^x\, dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^x(x-1).\end{aligned}$$

EXEMPLO 6.7

Calcule

$$\int x^2 \text{ sen } x \; dx.$$

Tomando

$$u = x^2 \text{ e } dv = \text{ sen } x \, dx \; ,$$

temos:

$$du = 2x \, dx \text{ e } v = -\cos x \, dx \; .$$

Assim, podemos aplicar a integral por partes como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \int x^2 \text{ sen } x \; dx &= x^2(-\cos x) - \int(-\cos x) \; 2x \; dx \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \; dx \\ &= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \; dx \end{aligned} \qquad (6.17)$$

Ainda não conseguimos chegar ao resultado, pois há uma outra integral a ser resolvida. Vamos, então, aplicar novamente a integração por parte no cálculo da integral

$$\int x \cos x \; dx$$

Consideremos as substituições

$$u = x \text{ e } dv = \cos x \, dx \; .$$

Daí, temos:

$$du = dx \text{ e } v = \text{sen } x \; .$$

Então

$$\begin{aligned} \int x \cos x \; dx &= x \text{ sen } x - \int \text{ sen } x \; dx \\ &= x \text{ sen } x - (-\cos x) + C_1 \\ &= x \text{ sen } x + \cos x + C_1 \end{aligned} \qquad (6.18)$$

Substituindo (6.18) em (6.17), teremos:

$$\int x^2 \text{ sen } x \; dx = -x^2 \cos x + 2(x \text{ sen } x + \cos x + C_1)$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \text{ sen } x + 2\cos x + 2C_1.$$

Considerando 2C1 = C, então podemos escrever:

$$\int x^2 \text{ sen } x \; dx = -x^2 \cos x + 2x \text{ sen } x + 2\cos x + C.$$

Esse exemplo que acabamos de ver foi um pouco mais trabalhoso que o anterior a ele pelo fato da integral na forma $\int v \; du$ ter exigido uma nova aplicação do método de integração por partes. Isso é normal que aconteça. Em algumas vezes, para resolver uma integral será necessária a aplicação da integração por partes três ou mais vezes. Considere por exemplo a integral

$$\int x^3 \text{ sen } x \; dx$$

Para resolver esta integral, será necessária a aplicação do método de integração por parte três vezes. No entanto, a repetição desse processo pode tornar a resolução exaustiva e demorada. Mas, há uma técnica de aplicação da integração por partes conhecida por ***integração tabular***, que torna esse tipo de processo mais rápido e ágil.

A ***integração tabular*** é aplicável em integrais de produtos de funções f · g em que uma delas pode ser derivada repetidamente até zerar e a outra pode ser facilmente integrada várias vezes. É o que acontece, por exemplo, com as funções $f = x^3$ e $g = \text{sen } x$. Note que a derivada de quarta ordem de f é zero e a função g pode ser integrada repetidas vezes sem dificuldade.

Para resolver, então, a integral $\int x^3 \text{ sen } x \; dx$, vamos montar uma tabela com as derivadas de f(x) e com as integrais de g(x):

LINHA	F(X) E SUAS DERIVADAS	G(X) E SUAS INTEGRAIS
1	x^3	$\text{sen } x$

LINHA	F(X) E SUAS DERIVADAS	G(X) E SUAS INTEGRAIS
2	$3x^2$	$-\cos x$
3	$6x$	$-\text{sen } x$
4	6	$\cos x$
5	0	$\text{sen } x$

Tabela 6.1

Para obter a integral $\int x^3 \text{ sen } x \ dx$, multiplicamos a função f(x) = x3 (linha 1) pela integral da função g(x) = sen x (linha 2). Depois, continuamos, considerando o oposto do produto da derivada de f(x) (linha 2) com a integral de "– cos x", que é "– sen x" (linha 3). E assim devemos continuar, sucessivamente, multiplicando a derivada de uma linha com a integral da linha seguinte da tabela, alternando o sinal, ora positivo, ora negativo, como mostram as setas da Tabela 6.1. O resultado obtido será, portanto

$$\int x^3 \text{ sen } x \ dx = -x^3 \cos x + 3x^3 \text{ sen } x + 6x \cos x - 6 \text{ sen } x.$$

Caso queira, você poderá resolver essa mesma integral utilizando repetidas vezes o método de integração por partes e verificar que chegará ao mesmo resultado.

Uma outra situação que ocorre com bastante frequência nas aplicações e que pode ser resolvida com a integração por partes é aquela em que a integral que queremos calcular surge novamente durante o processo de resolução. Vamos ver como isso acontece no exemplo a seguir.

EXEMPLO 6.8

Calcule

$$\int e^x \text{ sen } x \ dx$$

Considere as substituições

$$u = x^3 \text{ e } dv = \text{ sen } x \ dx \ .$$

Então

$$du = 3x^2 dx \text{ e } v = -\cos x \ .$$

Daí,

$$\int e^x \text{ sen } x \ dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \ dx \qquad (6.19)$$

A integral à direita, na expressão (6.19), é semelhante à da esquerda, diferenciando-se apenas pelo fato de ter “cos x” no lugar de “sen x”. Mas resolvendo a integral à direita com a integração por partes, surgirá uma integral igual à da esquerda em (6.19). Veja a seguir.

Vamos considerar as substituições

$$u = e^x \text{ e } dv = \cos x \ dx \ .$$

Então, teremos

$$du = e^x dx \text{ e } v = \text{ sen } x \ dx \ .$$

Assim, a integral à direita em (6.19), poderá ser dada por

$$\int e^x \cos x \ dx = e^x \text{ sen } x - \int \text{sen } x \ e^x \ dx$$

$$= e^x \text{ sen } x - \int e^x \text{ sen } x \ dx \qquad (6.20)$$

Considerando a integral em (6.20), portanto, podemos reescrever a integral à esquerda em (6.19) na forma:

$$\int e^x \text{ sen } x \ dx = -e^x \cos x + e^x \text{ sen } x - \int e^x \text{ sen } x \ dx \qquad (6.21)$$

Observe que as duas integrais da expressão (6.21) são exatamente iguais. Então, agora, basta-nos trabalhar algebricamente a expressão acima, de tal forma que possamos isolar a expressão $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$. Veja:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$2\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + C$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2}(-\cos x + \operatorname{sen} x) + C$$

Uma sugestão que visa facilitar a escolha das substituições no processo de integração por partes quando, na integral a ser calculada, estiver presente o termo "e^x", é considerar "$v = e^x$", pois a integral desse termo é igual a ele próprio.

Na próxima seção será apresentada uma técnica de integração que poderá ser aplicada em diversas situações em que o integrando tem a forma de fração algébrica.

6.2 Integração de funções racionais por frações parciais

No estudo sobre frações algébricas, quando temos que efetuar uma soma de duas (ou mais) delas, primeiro obtemos uma expressão que será utilizada como denominador comum das frações que serão somadas. Em seguida, obtemos exatamente as frações equivalentes à primeira e com o denominador comum que foi obtido para realizar a operação de adição (o mesmo acontece com a subtração). Veja um exemplo para compreender melhor.

EXEMPLO 6.9

Para efetuar a soma

$$\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x-4} \qquad (6.22)$$

devemos, primeiro, obter o denominador comum de ambas frações, que pode ser $(x+2)(x-4)$, para, em seguida, reescrever a expressão (6.22) e realizar as simplificações necessárias para chegar ao resultado esperado, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x-4} &= \frac{5(x-4)}{(x+2)(x-4)}+\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-4)}\\ &= \frac{5(x-4)+3(x+2)}{x^2-4x+2x-8}\\ &= \frac{5x-20+3x+6}{x^2-2x-8}\\ &= \frac{8x-14}{x^2-2x-8}\end{aligned}$$

Da mesma forma que partimos da expressão

$$\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x-4}$$

e chegamos a

$$\frac{8x-14}{x^2-2x-8}$$

podemos também, quando necessário, realizar o caminho (processo) inverso. E isso pode ser útil no cálculo de algumas integrais em que o integrando tem a forma de função racional. Veja o exemplo a seguir.

EXEMPLO 6.10

Calcule a integral

$$\int \frac{8x-14}{x^2-2x-8}\,dx$$

Como

$$\frac{8x-14}{x^2-2x-8}=\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x-4}$$

então podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int \frac{8x-14}{x^2-2x-8}\,dx &= \int\left(\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x-4}\right)dx\\ &= \int \frac{5}{x+2}\,dx+\int\frac{3}{x-4}\,dx\\ &= 5\int\frac{1}{x+2}\,dx+3\int\frac{1}{x-4}\,dx\\ &= 5\ln|x+2|+\ln|x-4|+C\end{aligned}$$

Nesse tipo de resolução de integrais, conseguimos escrever o integrando na forma de ***frações parciais*** tais que a aplicação das regras básicas de integração, apresentadas no Capítulo 4, possam ser aplicadas. Nesse exemplo, utilizamos as regras

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

e

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$$

em que k é uma constante.

Esse método é conhecido como ***método de integração por frações parciais***.

Mas como podemos partir de uma expressão como a do integrando do Exemplo 6.10 e transformá-la de tal forma que possa ser escrita como frações parciais, sem que antes tenhamos realizado o processo inverso? Vamos ver no próximo exemplo.

EXEMPLO 6.11

Vamos utilizar o *método de frações parciais* para resolver a integral

$$\int \frac{-3x+19}{x^2+2x-3}\,dx \qquad (6.23)$$

Devemos começar fatorando o denominador:

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

Já conhecemos as expressões que serão utilizadas como denominadores das frações parciais que substituirão o integrando. Mas, como ainda não obtemos os numeradores, vamos denotá-los por A e B. Então, podemos escrever

$$\frac{-3x+19}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} \qquad (6.24)$$

Daí, chegamos a

$$\frac{-3x+19}{x^2+2x-3} = \frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)} \qquad (6.25)$$

Como os denominadores em (6.25) são equivalentes, então, podemos concluir que

$$\begin{aligned} -3x+19 &= A(x-1)+B(x+3) \\ -3x+19 &= Ax - A + Bx + 3B \\ -3x+19 &= (A+B)x - A + 3B \end{aligned}$$

e, daí, pela igualdade entre polinômios, podemos concluir que

$$\begin{cases} A + B = -3 \\ -A + 3B = 19 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, chegamos aos resultados A = −7 e B = 4.

Considerando esses valores e a expressão (6.24), podemos resolver a integral em (6.23) como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \int \frac{-3x+19}{x^2+2x-3}\,dx &= \int \left(\frac{-7}{x+3} + \frac{4}{x-1} \right) dx \\ &= \int \frac{-7}{x+3}\,dx + \int \frac{4}{x-1}\,dx \\ &= -7\int \frac{1}{x+3}\,dx + 4\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -7\ln|x+3| + 4\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 6.12

Calcule

$$\int \frac{5x^3 + 10x^2 - 18x + 19}{x^2 + 2x - 3}\, dx \qquad (6.26)$$

No exemplo anterior, o integrando tinha a forma de uma fração em que o grau do numerador era menor que o do denominador. Agora, ocorre o inverso. Temos uma fração imprópria (o grau do numerador é maior que o do denominador). Nesse caso, vamos começar realizando a divisão do numerador pelo denominador:

$$\begin{array}{rl} 5x^3 + 10x^2 - 18x + 19 & x^2 + 2x - 3 \\ -5x^2 - 10x^2 + 15x & 5x \\ -3x + 19 & \end{array}$$

Podemos, então, reescrever a integral em (6.26) e começar a resolvê-la como mostrado a seguir:

$$\int \frac{5x^3 + 10x^2 - 18x + 19}{x^2 + 2x - 3}\, dx = \int \left(5x + \frac{-3x + 19}{x^2 + 2x - 3} \right) dx$$

$$= \int 5x \ dx + \int \frac{-3x + 19}{x^2 + 2x - 3} dx \qquad (6.27)$$

Note que a segunda integral em (6.27) já foi resolvida no exemplo anterior, utilizando o método de integração por frações parciais. Então, podemos concluir que:

$$\int \frac{5x^3 + 10x^2 - 18x + 19}{x^2 + 2x - 3}\, dx = \frac{5x^2}{2} + = -7 \ln|x+3| + 4 \ln|x-1| + C$$

A aplicação do ***método de integração por frações parciais*** para integrar funções na forma $\frac{f(x)}{g(x)}$ é possível em situações que "obedecem" às seguintes condições:

XII. A função f(x) do numerador deve ter grau menor que a função g(x) do denominador. Caso isso não aconteça, é possível efetuar a divisão de f(x) por g(x) e trabalhar com o resto dessa divisão (como mostra o Exemplo 6.12)

XIII. É necessário conhecer os termos que nos permitem fatorar a expressão g(x). Mesmo que, teoricamente, todo polinômio com coeficientes reais possa ser escrito na forma fatorada, sabemos que, em muitos casos, há grandes dificuldades em determinar os fatores que tornam isso possível, dificultando (ou inviabilizando) a aplicação do método de integração por frações pariciais.

6.3 Regra de l'hôpital e integrais impróprias

No cálculo de limites, por vezes, nos deparamos com formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, entre outras. Veja, por exemplo, o caso do limite seguinte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x} \qquad (6.28)$$

Substituindo x por 0 (zero) na expressão me (6.28), obteremos a forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Já vimos alguns casos em que tais expressões foram transformadas algebricamente para tornar possível o cálculo de certos limites. No entanto, esse tipo de procedimento nem sempre é fácil ou viável.

Nesta seção, veremos uma regra que torna esse tipo de cálculo muito mais fácil. Ela é conhecida por ***regra de L'Hôpital*** em homenagem a Guillaume François Antoine de l'Hôpital que escreveu o primeiro texto introdutório de Cálculo Diferencial em que essa regra foi mencionada. Mas, na verdade, quem a descobriu foi o matemático suíço Johann Bernoulli.

Pode parecer estranho falar em uma técnica para resolver limites justamente agora em que estamos falando de técnicas de integração. Mas, isso se justifica, pois, mais adiante veremos como calcular integrais chamadas de impróprias o que nos levará a utilizar a regra que será agora apresentada.

Uma forma mais básica dessa regra é apresentada a seguir.

Primeira forma da regra de L'Hôpital

Considere as funções f(x) e g(x), tais que, para um certo valor real c, temos

$$f(c) = g(c)$$

Se $f'(c)$ e $g'(c)$ existem, então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

desde que $g'(c) \neq 0$.

EXEMPLO 6.13

Vamos retomar o limite $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x}$.

Tomando

$$f(x) = 2 - \sqrt{x+4} \text{ e } g(x) = x ,$$

temos,

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+4}} \text{ e } g'(x) = 1 .$$

Como

$$f'(0) = -\frac{1}{2\sqrt{0+4}} = -\frac{1}{4} \text{ e } g'(0) = 1 ,$$

então podemos resolver o limite (aplicando a primeira forma da *regra de L'Hôpital*) da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x} = \frac{-\frac{1}{4}}{1} = -\frac{1}{4}$$

Podemos demonstrar a primeira forma da regra de L'Hôpital a partir da definição de derivada utilizando limite. Vamos mostrar que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

considerando, pela definição de derivada, que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

e

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

Podemos então afirmar que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}} = \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}$$

Como estamos considerando os casos em que $f(c) = g(c) = 0$, então chegamos à conclusão que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

como queríamos demonstrar.

Agora, vamos tentar essa primeira forma da regra de L'Hôpital para resolver o limite proposto no exemplo seguinte.

EXEMPLO 6.14

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{x+4} + \dfrac{x}{4}}{x^2}$.

Considerando

$$f(x) = 2 - \sqrt{x+4} + \frac{x}{4} \text{ e } g(x) = x^2,$$

temos,

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{4} \text{ e } g'(x) = 2x.$$

Observe que se aplicarmos a primeira forma da regra de L'Hôpital, ainda cairemos na forma indeterminada $\frac{0}{0}$, pois:

$$f'(0) = -\frac{1}{2\sqrt{0+4}} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

e

$$g'(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

Em situações como essa, podemos recorrer à segunda forma da regra de L'Hôpital, que é apresentada a seguir.

Segunda forma da regra de L'Hôpital

Considere as funções f(x) e g(x) deriváveis em um intervalo aberto I e que, para um certo valor c desse intervalo, f(c) = g(c). Considere, também, que para $x \in I$, tem-se $g(x) \neq 0$ se $x \neq a$. Então, podemos concluir que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite à direita existir.

Voltando ao limite do Exemplo 6.14, podemos aplicar a segunda forma da regra de L'Lôpital para resolvê-lo, como apresentado a seguir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x+4} + \frac{x}{4}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{4}}{2x}$$

Para resolvermos o limite à direita, aplicamos a primeira forma da regra de L'Hôpital, derivando novamente as expressões e calculando seus valores para x = 0. Teremos, portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x+4} + \frac{x}{4}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{4}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4\sqrt{(x+4)^3}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4\sqrt{(0+4)^3}}}{2}$$

$$= \frac{1}{64}$$

Há também uma versão da *regra de L'Hôpital* que pode ser utilizada na resolução de limites em que surge a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Vamos ver como utilizá-la através de um exemplo.

EXEMPLO 6.15

Calcule o limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$$

Se $x \to \infty$, então

$$\ln(x+1)\to\infty \text{ e } \sqrt{x+1}\to\infty .$$

Portanto, aqui, vemos um forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.
Considerando que

$$\frac{d\left[\ln(x+1)\right]}{dx}=\frac{1}{x+1} \text{ e } \frac{d\left[\sqrt{x+1}\right]}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

e aplicando a segunda forma da *regra de L'Hôpital,* temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x+1}}{x+1}\\&=2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\end{aligned} \qquad (6.29)$$

Como

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

então, voltando a (6.29), temos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} = 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$$
$$= 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$
$$= 2\cdot 0$$
$$= 0$$

Vamos, agora, volta a falar em integrais.

Todas as integrais definidas vistas no Capítulo 5 tinham um intervalo de integração [a,b] finito e, além disso, a função f(x) do integrando possuía imagem também finita para esse domínio (intervalo de integração).

No entanto, há casos em que ou o intervalo de integração é infinito ou a imagem do integrando é infinita. E há diversas situações aplicadas em que tais possibilidades ocorrem. No estudo de probabilidades, por exemplo, a principal e mais utilizada distribuição de probabilidades é definida por uma função que é integrada no intervalo $]-\infty,\infty[$. Ela é conhecida por *distribuição normal* ou *curva de gauss*.

Nos exemplos seguintes, veremos alguns tipos de integrais impróprias e suas resoluções.

EXEMPLO 6.16

Um primeiro caso que veremos refere-se a uma integral definida em um intervalo infinito. Vamos determinar a área sob o gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

para x variando de 2 a ∞ .

Mas, se x tende ao infinito, então a área também não tenderá? Não necessariamente. Note que a função f(x) tende a zero (seu gráfico aproxima-se mais e mais do eixo x) à medida que x cresce. Isso faz com que a área em questão não cresça indefinidamente.

A representação, utilizando integral, para a área que queremos determinar é

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

Mas, para determinar essa área, vamos resolver a integral definida

$$\int_2^b \frac{1}{x^2}\,dx$$

e, depois, calculamos o limite da função resultante (o resultado da integral será dada em função de b) com $b \to \infty$. Temos, então:

$$\int_2^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^b$$
$$= -\frac{1}{b} + \frac{1}{2}$$

A área que queremos determinar será dada por

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)$$
$$= 0 + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Vamos a mais um exemplo, este em que teremos que utilizar a *regra de L'Hôpital*.

EXEMPLO 6.17

Determine a área delimitada pelo eixo x e pela função $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, com x entre 1 e η .

Vamos começar calculando a integral definida

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx \qquad (6.30)$$

Aqui, será necessário utilizar a *integração por partes* considerando as substituições

$u = \ln x$ e $dv = x^{-2}dx$.

Dessa forma, teremos

$du = \frac{1}{x}dx$ e $v = -\frac{1}{x}$.

Substituindo na integral (6.30) e resolvendo-a, teremos:

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx &= \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx\\ &= \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b\\ &= -\frac{\ln b}{b} + \left(-\frac{\ln 1}{1}\right) - \left[\frac{1}{b} - 1\right]\\ &= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\end{aligned}$$

Portanto, a área que queremos será dada por

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right)\\ &= -\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b} + \lim_{b\to\infty} 1\\ &= -\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b} - 0 + 1\end{aligned}$$

Para resolver o limite

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}$$

utilizamos a regra de L'Hôpital e obtemos

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{1} = 0$$

Portanto a área será dada por

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = 1$$

O campo de atuação do Cálculo Diferencial e Integral e suas possibilidades são muito amplas. Não é possível esgotar os assunto apresentados em um livro. Mesmo os assuntos que fazem parte do escopo desse livro não foram totalmente abordados, até porque acredito que isso não é possível. Mas o objetivo é apresentar os fundamentos e muitas das possibi-

lidades que está área da Matemática nos fornece e que têm diversas aplicações. Isso vale também para as integrais impróprias que aqui foram apenas apresentadas para que você comece a se familiarizar com esse tipo de integral. Há outros tópicos de Cálculo que serão abordados em outros livros como, por exemplo, o cálculo de derivadas e integrais para funções com mais de uma variável.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOULOS, P. **Cálculo Diferencial e Integral.** Vol. 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

FINNEY, R. L.; WEIR, M. D. e GIORDANO, F. R. **Cálculo**. Vol. 1. São Paulo: Pearson, 2002.

GOLDSTEIN, L. J.; LAY, D. C. e SCHNEIDER, D. I. **Matemática aplicada: economia, administração e contabilidade.**

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica.** Vol. 1. 5a ed. São Paulo: Harbra, 1994.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W. O. **Cálculo: funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2006.

MUNEM, M. A. e FOULIS, D. J. **Cálculo.** Vol. 1. Rio de Janeiro: Guanabara, 1982.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Books, 1994.